ESERCIZI foglio 0
Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2021/22
Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1.
Siano A e B due eventi indipendenti. Provare che anche A^c e B^c lo sono.

2.
a) Mostrare che se X é una v.a. a valori non negativi e $E(X) = 0$ allora $X = 0$, q.c. (quasi certamente).
b) Mostrare che se se X é una v.a. a valori reali tale che $E(|X|) = 0$, allora $X = 0$, q.c. (quasi certamente).
c) Mostrare che se X e Y sono v.a. a valori reali $\mathcal{B}$-misurabili ove $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ e

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad E(I_B X) = E(I_B Y)$$

allora $X = Y$ q.c. (quasi certamente).

3.
Siano X e Y due variabile aleatorie dimostrare:
a) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$;
b) $Var(aX) = a^2 Var(X), \quad \forall a \in R$;
c) $Var(X + a) = Var(X), \quad \forall a \in R$;
d) $Cov(X + Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y)$;
e) $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y), \quad \forall a \in R$;
f) $Cov(X, a) = 0, \quad \forall a \in R$.

4. Una azienda fallisce non appena una delle due sezioni A e B risultano insolventi. Siano τ_A e τ_B i tempi di default di A e B e si assumano variabili aleatorie indipendenti di distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_A > 0$ e $\lambda_B > 0$, rispettivamente. Indicare con τ il tempo di default dell'azienda. Calcolare:
a) $P(\tau \leq t)$, per ogni $t > 0$;
(Suggerimento: osservare che $\tau = min\{\tau_A, \tau_B\}$)
b) $P(\tau_A \leq t | \tau \leq t)$, τ_A e τ sono indipendenti?

5. Siano X ed Y v.a. indipendenti. Provare che:
a) Se Z é una v.a. $\sigma(X)$-misurabile, allora Y e Z sono indipendenti.
b) Se f e g sono funzioni misurabili allora le v.a. $f(X)$ e $g(Y)$ sono indipendenti.