ESERCIZI foglio 1

Corso di Titoli derivati e Gestione del rischio II, a.a. 2021/22

Prof.ssa Claudia Ceci

Sia dato uno spazio di probabilitá $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. Sia Λ una v.a. di distribuzione uniforme su $\{1, 2, \dots 10\}$ ed N una v.a. a valori in $\{0, 1, 2, \dots\}$ tale che

$$P(N = n | \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

(distribuzione di Poisson condizionata a Λ).
Determinare la distribuzione di N, ossia $P(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2. Sia N una v.a. di distribuzione di Poisson di parametro $\lambda > 0$ (ossia $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$) e $\{Z_i\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite di media μ. Si supponga inoltre N e la successione $\{Z_i\}$ indipendenti. Calcolare il valore atteso della v.a.

$$X = \sum_{i=1}^{N} Z_i.$$

[**Suggerimento:** Calcolare $E[X|N = n]$ e successivamente applicare la proprietá che $E[X] = E[E[X|N]]$, ricordarsi che vale la seguente relazione $E[g(N)] = \sum_{n \geq 0} g(N) P(N = n)$.]

3. Sia Λ una v.a. di distribuzione di uniforme nell'intervallo (a, b), con $0 < a < b$ e T una v.a. di distribuzione condizionata data la v.a. Λ:

$$P(T \leq t | \Lambda = \lambda) = (1 - e^{-\lambda t}) I_{\{t \geq 0\}}.$$

(distribuzione esponenziale condizionata a Λ)
(a) Determinare la densitá congiunta della coppia (Λ, T);
(b) La media condizionata $E[T|\Lambda]$;
(c) Calcolare $E[T]$.