

Fig. 6

st'ultimo è detto *strettamente convesso*. Se si possono trovare due punti tali che la linea che li unisce coincide almeno in parte con il confine dell'insieme, allora questo non è strettamente convesso. Nella figura 6(a) gli insiemi B e C sono strettamente convessi, mentre l'insieme A non lo è.

Esercizi

1. a) Provare che ogni massimo globale deve anche essere un massimo relativo.
- b) Provare che se in un certo problema esiste più di un massimo globale, il valore della funzione obiettivo deve essere uguale in ciascuno di tali punti.
- c) Mostrare che una funzione lineare è sia concava che convessa, ma non è strettamente concava né strettamente convessa.

2.* Per ognuno dei seguenti casi:

$$(a) f_1, f_2 < 0 \quad (b) f_1 > 0, f_2 < 0 \quad (c) f_1 < 0, f_2 > 0$$

dove f_1 e f_2 sono le derivate parziali della funzione $f(x_1, x_2)$, si definiscano e traccino i contorni di funzioni quasi-concava, strettamente quasi-concava e non-quasi-concava. Indicare in ciascun caso la direzione in cui sono ottenuti i contorni più alti.

- 3.* Dato un punto x' sul contorno di una funzione $f(x)$, definire l'"insieme migliore" B' come l'insieme dei punti aventi la proprietà: $f(x) \geq f(x')$. Potete formulare delle definizioni di quasi-concavità e stretta quasi-concavità di una funzione in termini delle proprietà di tale insieme B' ?
- 4.* Servendosi delle definizioni di cui alle equazioni (2.4) e (2.10), mostrare che

una funzione concava è sempre quasi-concava. Al fine di provare che non vale il contrario, si tracci nello spazio tridimensionale ovvero si descriva una funzione quasi-concava.

- 5.* Si considerino gli insiemi ammissibili della Domanda 2 degli Esercizi precedenti e si elenchi se sono non-vuoti, chiusi, limitati e convessi.
6. Si spieghi perché un insieme può non essere limitato ma chiuso, o limitato ma non chiuso.

3. Esistenza della soluzione

Muniti delle idee intuitive su funzioni obiettivo e insiemi ammissibili viste in precedenza, possiamo ora cercare di rispondere ad alcune delle questioni poste all'inizio del paragrafo precedente. La domanda fondamentale da porre in un problema di ottimizzazione è se una soluzione esista. A tal proposito possiamo specificare delle condizioni circa le proprietà dell'insieme ammissibile e della funzione obiettivo tali da assicurare che una soluzione esista. Tali condizioni sono contenute nel seguente *Teorema dell'Esistenza*:

Un problema di ottimizzazione possiede sempre una soluzione se:

1. la funzione obiettivo è *continua*; e se l'insieme ammissibile è:
2. *non-vuoto*
3. *chiuso*
4. *limitato*

Questo teorema, per la prima volta dimostrato dal matematico K. Weierstrass, si basa sul fatto che l'insieme dei valori della funzione $f(x)$ che risulta quando le imputiamo i valori x dell'insieme ammissibile, è esso stesso non-vuoto, chiuso e limitato quando le condizioni del teorema siano soddisfatte. Quindi abbiamo un insieme di numeri reali che non eccedono un certo numero y_{\max} e che non sono inferiori a un certo numero y_{\min} (insieme limitato), e dove tali due numeri y_{\max} e y_{\min} appartengono all'insieme (insieme chiuso). Quindi la funzione $f(x)$ possiede un massimo y_{\max} e un minimo y_{\min} per i valori dell'insieme ammissibile.

Una semplicissima illustrazione del ruolo delle condizioni (1)–(4) del teorema è fornita in figura 7. Consideriamo un problema a una sola variabile, la funzione obiettivo essendo $f(x)$, x uno scalare, e l'insieme delle possibilità l'insieme dei valori compresi nell'intervallo $0 \leq x \leq x'$. Questo insieme è non-vuoto, chiuso e limitato. Nella parte (a) della figura la funzione $f(x)$ è continua e una soluzione al problema di massimizzazione di f relativamente all'insieme ammissibile è data da x' , il limite superiore dell'insieme ammissibile. In (b) invece la funzione è discontinua in corrispondenza di x^0 . In tal caso non vi è soluzione al problema di massimizzazione: permettendo $x \rightarrow x^0$, accresciamo senza limite la funzione, dal momento che $\lim_{x \rightarrow x^0} f = \infty$. La condizione di continuità del teorema esclude possibilità come la (b).

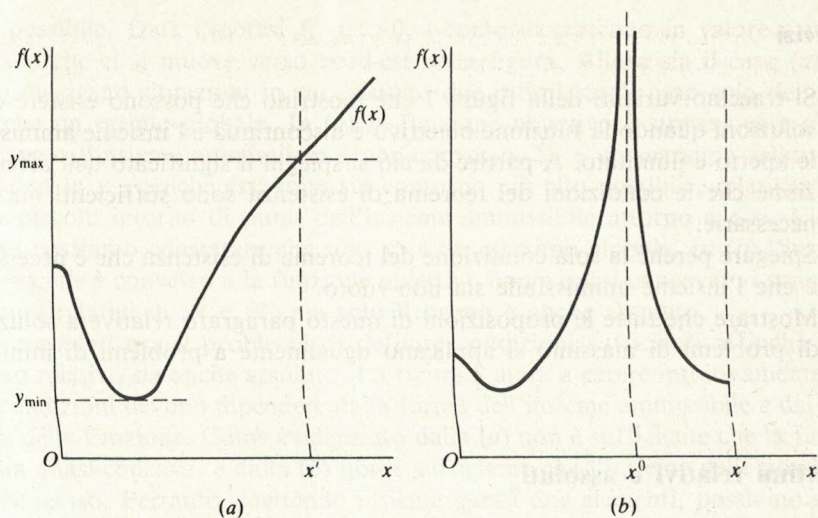


Fig. 7

Per comprendere l'importanza della chiusura, si supponga che l'insieme delle possibilità sia definito dall'intervallo $0 \leq x < x'$, cosicché il limite superiore x' non appartiene all'insieme. Allora, in (a), se permettiamo $x \rightarrow x'$ accresciamo la funzione $f(x)$ senza limite, poiché x si avvicina sempre più a x' senza mai raggiungerlo. In altre parole y_{\max} non è un elemento dell'insieme dei valori che la funzione $f(x)$ può assumere. Quindi il problema di ottimo non ha soluzione.

Il fatto che l'insieme sia limitato è anch'esso importante, poiché in sua assenza abbiamo di nuovo la possibilità che il valore della funzione obiettivo possa essere fatto crescere senza limite. Si supponga che in figura 7(a) l'insieme ammissibile del problema sia semplicemente definito dal vincolo $x \geq 0$ e che la funzione obiettivo sia monotonicamente crescente per $x > x'$. Allora chiaramente non esisterà alcun massimo. Un insieme ammissibile limitato impedisce tale tipo di evenienza.

Va notato che le condizioni di continuità della funzione obiettivo e di chiusura e limitazione dell'insieme ammissibile sono *condizioni sufficienti ma non necessarie* per l'esistenza di una soluzione. In altre parole *possono* esistere delle soluzioni anche se quelle condizioni non sono soddisfatte, così come soluzioni possono non esistere. Il soddisfacimento di tali condizioni, comunque, elimina tutti i casi possibili di non-esistenza. Si noti infine che la condizione che l'insieme ammissibile sia non-vuoto è una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione: qualunque problema in cui nessun punto è ammissibile non può avere una soluzione.

Esercizi

1. Si traccino varianti della figura 7 che mostrino che possono esistere delle soluzioni quando la funzione obiettivo è discontinua e l'insieme ammissibile aperto e illimitato. A partire da ciò si spieghi il significato dell'affermazione che le condizioni del teorema di esistenza sono sufficienti ma non necessarie.
2. Spiegare perché la sola condizione del teorema di esistenza che è necessaria è che l'insieme ammissibile sia non-vuoto.
- 3.* Mostrare che tutte le proposizioni di questo paragrafo relative a soluzioni di problemi di massimo si applicano ugualmente a problemi di minimo.

4. Ottimi relativi e assoluti

Supponiamo che le condizioni che garantiscono l'esistenza di una soluzione siano soddisfatte: abbiamo cioè una funzione obiettivo continua e un insieme ammissibile non-vuoto, chiuso e limitato. Consideriamo un problema a due variabili dove vogliamo massimizzare la funzione $f(x_1, x_2)$, con $f_1, f_2 > 0$. Ci interessiamo ora alla seguente domanda: dato che possiamo individuare un massimo locale della funzione, sotto quali condizioni possiamo essere certi che si tratta pure di un massimo globale?

Due possibilità da cui possiamo desumere le condizioni che cerchiamo sono indicate nella figura 8, dove le aree grigie rappresentano gli insiemi ammissibili. Si rammenti che la massimizzazione di una funzione per un dato insieme ammissibile è equivalente a trovare un punto dell'insieme che sia sul contorno più

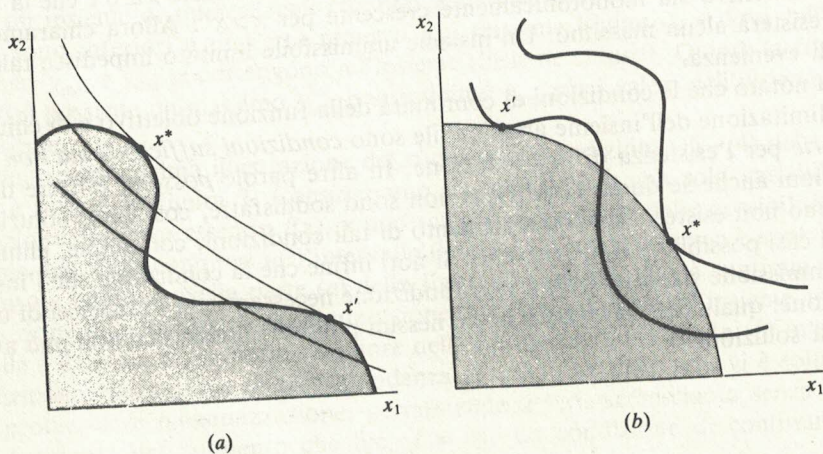


Fig. 8

alto possibile.
a mano che ci
il (b) mostran
è anche un ot
concava e l'f
 x^* e uno in
a un piccolo
mente possiam
ammissibile è
massimi relati
Si consideri
ottimo relativo
tali condizioni
torni della fun
ne sia quasi-co
sia convesso. P
ciare il teorema

Un massimo n

1. la funzione

2. l'insieme am

Per avere una c

9. L'insieme am

alto possibile. Data l'ipotesi $f_1, f_2 > 0$, i contorni crescono in valore a mano a mano che ci si muove verso nord-est nella figura. Allora sia il caso (a) che il (b) mostrano situazioni in cui esistono due ottimi locali, uno solo dei quali è anche un ottimo globale. In (a) la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava e l'insieme ammissibile è non-convesso. Vi è un massimo relativo in x^* e uno in x' , poiché essi sono sul contorno più alto possibile, relativamente a un piccolo intorno di punti dell'insieme ammissibile attorno a essi. Visivamente possiamo constatare che solo x^* è un massimo globale. In (b) l'insieme ammissibile è convesso e la funzione obiettivo non è quasi-concava: vi sono due massimi relativi in x^* e x' , ma solo il primo è anche assoluto.

Si consideri ora il problema di definire condizioni sufficienti affinché ogni ottimo relativo sia anche assoluto. La figura 8 aiuta a capire intuitivamente che tali condizioni devono dipendere dalla forma dell'insieme ammissibile e dai contorni della funzione. Come evidenziato dalla (a) non è sufficiente che la funzione sia quasi-concava, e dalla (b) non è sufficiente che l'insieme delle possibilità sia convesso. Pertanto, mettendo insieme questi due elementi, possiamo enunciare il teorema:

Un massimo relativo è anche un massimo assoluto se:

1. la funzione obiettivo è quasi-concava
2. l'insieme ammissibile è convesso.

Per avere una comprensione intuitiva di questo teorema consideriamo la figura 9. L'insieme ammissibile S è convesso e la funzione obiettivo, con contorno c ,

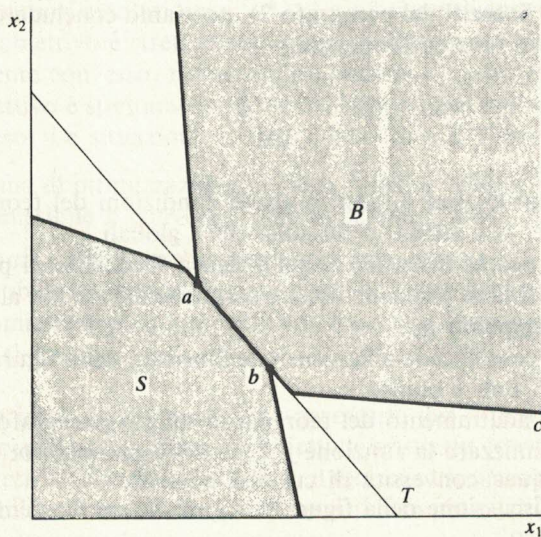


Fig. 9

è quasi-concava. Quest'ultimo fatto implica che l'insieme B , che consiste nei punti lungo e al di sopra del contorno c , è pure convesso. La soluzione al problema consiste nei punti del segmento ab , poiché tali punti stanno in S sul più alto contorno possibile. Poiché questi punti giacciono sullo stesso contorno, essi producono lo stesso valore della funzione obiettivo: ognuno è un massimo sia assoluto che relativo. Si consideri ora la linea T , parte della quale coincide con il segmento ab . Poiché S è un insieme convesso, e il segmento ab giace lungo il suo confine superiore, l'insieme S deve giacere lungo T o al di sotto — nessun punto di S può giacere al di sopra di T . Allo stesso modo, poiché B è un insieme convesso (risultato della quasi-concavità della funzione) e ab giace lungo il suo bordo inferiore, l'intero insieme B deve giacere su o sopra T — nessun punto di B può giacere al di sotto di T . Ma B è l'insieme di punti che producono un valore della funzione obiettivo alto almeno quanto i punti lungo ab . Ma ciò a sua volta implica che i punti lungo ab devono essere ottimi globali oltreché locali.

La differenza tra le situazioni in figura 8 e 9 è che nella prima l'assenza di convessità o quasi-concavità implica che l'insieme B può intersecare l'insieme S in punti diversi da un certo ottimo locale, cosicché tale ottimo non può essere anche globale. La convessità di entrambi gli insiemi S e B esclude questa eventualità. In tal caso si dice che la linea T separa gli insiemi S e B , e l'importanza della convessità di S e B sta nel fatto che una simile linea può sempre essere individuata. Si noti, ancora una volta, che le condizioni del teorema sono sufficienti ma non necessarie: anche se non sono verificate, la configurazione dei contorni e dell'insieme ammissibile possono far sì che ottimi relativi siano anche assoluti.

Finalmente, poiché una funzione concava è anche quasi-concava (si veda la Domanda 4 degli Esercizi del paragrafo 2), possiamo concludere che il teorema è valido anche per funzioni concave.

Esercizi

1. a) Si disegnino esempi di casi in cui le condizioni del teorema non sono soddisfatte, ma ottimi locali sono pure globali.
b) Si spieghi perché l'insieme B nella figura 9 consiste di punti che forniscono valori della funzione obiettivo almeno altrettanto alti quanto quelli lungo il segmento ab .
2. Si suggerisca cosa accade alla soluzione illustrata nella figura 9 se l'insieme ammissibile S non è chiuso.
- 3.* Si consideri l'adattamento del teorema di questo paragrafo al caso in cui si voglia minimizzare la funzione $f(x_1, x_2)$. [Suggerimento: si riveda la definizione di quasi-convessità di cui alla nota 3].
4. Si adatti la discussione della figura 9 al caso in cui l'insieme B sia strettamente convesso.

5. Unicità della soluzione

Da un punto di vista normativo o prescrittivo la questione dell'unicità delle soluzioni non è molto importante: per definizione un ottimo assoluto è tanto buono quanto un altro. Tuttavia, se usiamo i problemi di ottimizzazione per scopi positivi o previsionali, la questione se un agente decisore abbia un'unica decisione ottimale o un certo numero di decisioni ugualmente buone è di maggiore rilevanza. Essa si riferisce primariamente alla natura delle relazioni che formuliamo per mostrare il modo in cui le decisioni mutano in risposta a mutamenti dei vincoli che definiscono l'insieme ammissibile. Quando la soluzione ottimale è unica per ogni insieme ammissibile dato, possiamo specificare delle funzioni che mettono in relazione valori ottimali delle variabili decisionali e parametri dei vincoli. Questo è per esempio il modo in cui deriviamo funzioni di domanda, di costo e di offerta in Economia. Se d'altra parte la soluzione non è unica, allora abbiamo una più generale relazione tra *insiemi* ottimali di valori delle variabili decisionali e parametri dei vincoli, nota come *corrispondenza*. Sebbene non presenti ostacoli insormontabili per l'analisi, ciò richiede tuttavia un cambiamento nelle nostre procedure e nel nostro approccio. Poiché la scienza economica (al livello considerato da questo libro) impiega funzioni anziché corrispondenze, è il caso di essere a conoscenza delle precise circostanze in cui ciò è lecito. Esse si verificano quando le soluzioni dei problemi di ottimizzazione rilevanti sono uniche.

Nella figura 9 abbiamo visto un caso in cui vi sono ottimi assoluti multipli: vi è cioè un numero infinito di punti ottimali lungo il segmento ab . In quel caso l'insieme ammissibile è convesso, ma non strettamente, e la funzione obiettivo è quasi-concava, ma non strettamente. Consideriamo ora la figura 10, dove sono riportati tre ottimi assoluti unici, x^* , x' e x'' rispettivamente. Nel primo caso la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava ma l'insieme ammissibile non è strettamente convesso, nel secondo abbiamo il caso opposto, e nel terzo la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava e l'insieme ammissibile è strettamente convesso. Le situazioni in figura illustrano il *Teorema dell'unicità*:

Dato un problema di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è quasi-concava e l'insieme ammissibile è convesso, una soluzione è unica se:

1. l'insieme ammissibile è strettamente convesso oppure
2. la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava oppure
3. l'insieme ammissibile è strettamente convesso e la funzione obiettivo è strettamente quasi-concava.

Questo teorema implica che condizione necessaria per ottimi multipli è che né stretta quasi-concavità della funzione obiettivo né stretta convessità dell'insieme ammissibile si verificino. Come al solito, il teorema espone solo condizioni sufficienti: è possibile che esista una soluzione unica in presenza di condizioni non soddisfatte, ma non possiamo esserne certi.

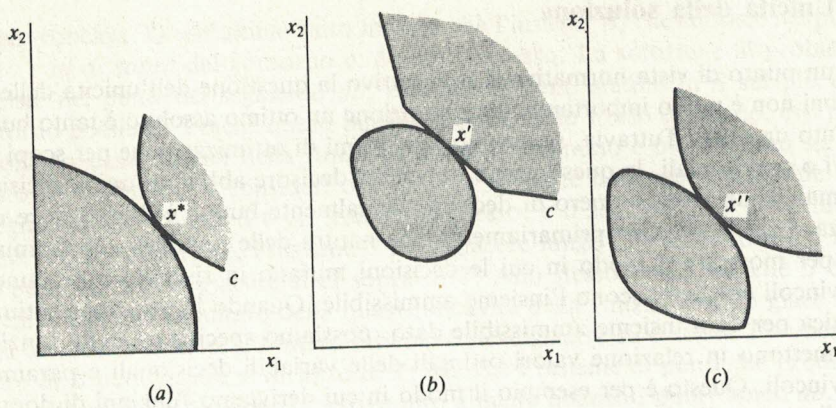


Fig. 10

Esercizi

1. Tracciare esempi grafici in cui l'ottimo è unico anche se le condizioni del teorema non sono soddisfatte.
- 2.* Applicare il teorema di questo paragrafo al caso di problemi di minimizzazione (ci si rifaccia alla Domanda 3, Esercizi del paragrafo 4).
3. Quando $f_1, f_2 > 0$, mostrare che per l'unicità è sufficiente che l'insieme ammissibile sia *convesso verso l'alto*, cioè che una linea che congiunge due punti qualsiasi sul suo *confine superiore* giace all'interno dell'insieme (Suggerimento: si consideri la figura 10(a)).

6. Ottimi interni e di confine

I confini di un insieme ammissibile sono sempre definiti dai vincoli che sono parte integrante di un problema di ottimizzazione. Dato che quell'insieme è chiuso, possiamo suddividere i suoi punti in due insiemi reciprocamente escludentisi: quello dei punti interni e quello dei punti di confine. Grosso modo, i punti del primo giacciono entro i confini, mentre i punti del secondo giacciono sui confini. Più rigorosamente, l'aspetto caratterizzante di un punto interno per un insieme del nostro tipo è che possiamo trovare un intorno (per quanto piccolo) del punto che contenga *solo* punti dell'insieme. Un punto di confine, invece, ha la proprietà che *tutti* gli intorni vicini, per quanto piccoli, contengono punti che appartengono e punti che non appartengono all'insieme (si traccino dei diagrammi che mostrano queste definizioni).

Rammentiamoci del perché siamo interessati alla distinzione tra punti interni e di confine. In generale una soluzione a un problema di ottimizzazione che sia un punto interno dell'insieme ammissibile non è influenzata da piccole varia-

zioni nei con-
punto di con-
parte della M
problemi di o
zioni siano in

Nelle part
le aree Oab . In
degli ottimi d
zata da un *pic*
è, e quella in

L'assenza d
esistenza di un
lima" i cui con
obiettivo assu
mum maxim
rio perché vi s
di confine com
morum" (ma
è quella in cui
 $f_i > 0$, dove f_i
siamo andare
aito dell'insiem
funzione quest
no che ci si sp
è necessario che
nimorum", le
obiettivo sia di
punto dell'insie
di almeno una
che in punti di



zioni nei confini dell'insieme stesso, mentre una soluzione coincidente con un punto di confine sarà sensibile a variazioni in almeno un vincolo. Poiché gran parte della Microeconomia si occupa di predire le variazioni nelle soluzioni di problemi di ottimo risultanti da variazioni nei vincoli, la questione se tali soluzioni siano interne o di confine è fondamentale.

Nelle parti (a) e (b) della figura 11 gli insiemi ammissibili sono inizialmente le aree Oab . In (a) abbiamo un ottimo interno in x^* , mentre in (b) e (c) abbiamo degli ottimi di confine, pure indicati con x^* . La soluzione in (a) non è influenzata da un *piccolo* spostamento del vincolo, per esempio $a'b'$, quella in (b) lo è, e quella in (c) lo è nel caso di uno spostamento di cd ma non di ab .

L'assenza di risposta da parte della soluzione in (a) è dovuta all'ipotizzata esistenza di un punto di "maximum maximorum" in x^* (il "picco" della "collina" i cui contorni sono tracciati nella figura), cioè un punto in cui la funzione obiettivo assume il suo valore massimo. Il verificarsi di un punto di "maximum maximorum" all'interno dell'insieme ammissibile è chiaramente necessario perché vi sia un massimo interno, cosicché possiamo caratterizzare massimi di confine come quei punti per cui non esiste alcun punto di "maximum maximorum" (ma si veda la Domanda 1 degli Esercizi). Una simile classe di casi è quella in cui la funzione obiettivo è monotonicamente crescente, cioè ogni $f_i > 0$, dove f_i è la derivata parziale i -esima della funzione. In questi casi possiamo andare oltre e affermare che la soluzione deve trovarsi sul confine *più alto* dell'insieme ammissibile (si spieghi il perché). In termini di contorni della funzione questo fatto implica che contorni più alti sono raggiunti a mano a mano che ci si sposta verso destra nel diagramma. Chiaramente, comunque, non è necessario che, se vogliamo escludere la possibilità di punti di "maximum maximorum", le derivate parziali siano tutte positive, o perfino che la funzione obiettivo sia differenziabile. È semplicemente necessario supporre che per ogni punto dell'insieme ammissibile è sempre possibile avere una piccola variazione di almeno una variabile che aumenti il valore della funzione obiettivo. Si noti che in punti di *ottimo* una simile variazione ci condurrebbe al di fuori dell'in-

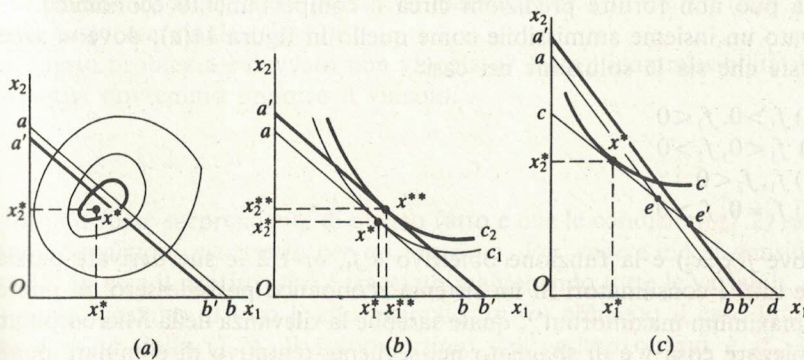


Fig. 11

sieme ammissibile (si spieghi perché), e quindi il campo della funzione deve essere più ampio dell'insieme ammissibile.

Le parti (b) e (c) della figura mostrano due tipi di ottimo di confine. In (b) vi è solamente un confine superiore e, data l'ipotesi che $c_2 > c_1$, spostamenti del confine cambiano il punto di ottimo. In (c) l'insieme ammissibile iniziale è dato dall'area $Oceb$ definita da due disuguaglianze lineari deboli e vincoli di non negatività per x_1 e x_2 . L'ottimo iniziale è sul confine in x^* . In tal punto il vincolo definito dalla linea ab è soddisfatto come disuguaglianza stretta (spiegare perché). Questo vincolo è in realtà non operante *in corrispondenza della soluzione*. Una volta che sappiamo dove si colloca la soluzione, un vincolo non operante può essere trascurato da ogni analisi che sia interessata a variazioni entro un piccolo intorno del punto di ottimo, e ciò spesso semplifica grandemente l'analisi stessa. *Prima* di risolvere il problema tuttavia, è impossibile sapere quale vincolo risulterà essere non operante (dato che abbiamo escluso vincoli che giacciono *completamente* al di fuori di altri vincoli e che quindi non potrebbero mai essere operanti) e quindi dobbiamo tenere conto di tutti i vincoli. Inoltre, in un'analisi teorica generale non abbiamo sufficienti informazioni per concludere che qualche vincolo risulterà non operante e quindi tutte le soluzioni possibili vanno considerate. In figura 11(a) vi sono tre di queste possibilità: tutte le soluzioni possibili vanno considerate. In figura 11(a) vi sono tre di queste possibilità: si evidenzino le due non discusse. Cosa si può dire in quelle situazioni a proposito della reazione della soluzione a variazioni nei vincoli?

Esercizi

1. Tracciare l'esempio di un caso in cui un punto di "maximum maximorum" esiste, ma in cui la soluzione è influenzata da *qualche* tipo di variazione nei vincoli.
- 2.* La teoria del "soddisfacimento" afferma che, dato l'insieme ammissibile, un individuo sceglie non la *migliore* alternativa ma una "soddisfacente". Si spieghi perché, in termini della discussione di questo paragrafo, tale teoria può non fornire predizioni circa il comportamento economico.
3. Dato un insieme ammissibile come quello in figura 11(a), dove vi aspettereste che sia la soluzione nei casi:

$$1) f_1 > 0, f_2 < 0$$

$$2) f_1 < 0, f_2 > 0$$

$$3) f_1, f_2 < 0$$

$$4) f_1 = 0, f_2 > 0$$

dove $f(x_1, x_2)$ è la funzione obiettivo e f_i , $i=1,2$ le sue derivate parziali.

- 4.* Se tutti i consumatori in un sistema economico possedessero un punto di "maximum maximorum", quale sarebbe la rilevanza della Microeconomia?
5. Spiegare cosa v'è di sbagliato nel seguente tentativo di eliminare punti di "maximum maximorum": supponiamo che dato un qualsiasi punto nell'in-

sieme ammissibile, possiamo sempre trovare un altro punto ammissibile che fornisca un valore più alto della funzione obiettivo.

7. Collocazione dell'ottimo

Come suggerito in precedenza, nel caso di modelli teorici generali non abbiamo informazioni numeriche con cui trovare soluzioni a problemi di ottimizzazione. Invece, cerchiamo di descrivere le caratteristiche o proprietà che la soluzione possiede in termini delle condizioni generali che soddisfa. In questo libro siamo normalmente interessati solo a condizioni necessarie, cioè condizioni che sono soddisfatte da tutti i punti che sono punti di ottimo (ma che potrebbero pure essere soddisfatte da punti non ottimali). L'ulteriore questione della sufficienza sarà considerata solo quando sia di particolare interesse o rilevanza.

Si suppone a questo punto che il lettore sia familiare con le condizioni affinché il punto $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ fornisca un massimo della funzione $f(x)$ in assenza di vincoli, cioè:

$$f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.1)$$

e quindi ogni derivata parziale della funzione, valutata in x^* , deve annullarsi. Una semplice applicazione di questo principio è la teoria della scelta da parte dell'impresa dei livelli di output che massimizzano il profitto. Si supponga che $R(x)$ e $C(x)$ siano rispettivamente le funzioni di ricavo e di costo dell'impresa, dove x è un vettore di output (abbiamo cioè un'impresa multiprodotto). Allora la funzione obiettivo dell'impresa è il profitto: $f(x) = R(x) - C(x)$. Il vettore di output che massimizza il profitto non vincolato è caratterizzato dalla condizione:

$$f_i(x^*) = R_i(x^*) - C_i(x^*) = 0 \quad (7.2)$$

che fornisce la familiare descrizione del livello di output che massimizza il profitto in termini di uguaglianza tra ricavo marginale di ogni output ($R_i(x^*)$) e rispettivo costo marginale ($C_i(x^*)$).

Ma questo problema è davvero non vincolato? Data l'inammissibilità di output negativi dovremmo imporre il vincolo:

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.3)$$

Un risultato forse sorprendente di questo fatto è che le condizioni (7.2) cessano di essere condizioni necessarie per un massimo. Per vedere ciò si consideri la figura 12. In essa il profitto $f(x)$ è tracciato mantenendo tutte le variabili, eccetto l' i -esima, costanti al loro livello ottimale. In (a) abbiamo il caso implicitamente definito dalla (7.2). Il valore ottimo dell' i -esimo output è $x_i^* > 0$ e il vincolo (7.3) non è operante nel punto di ottimo. Ne segue che si applica il soli-

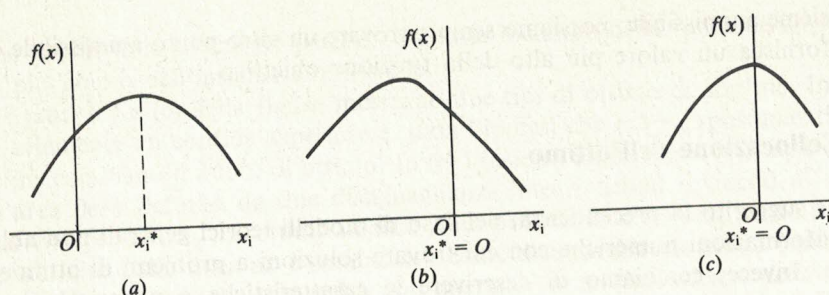


Fig. 12

to argomento: la derivata del profitto deve essere zero in x_i^* perché altrimenti x_i potrebbe essere variato così da aumentare il valore di f . Tuttavia, in (b) il più alto valore ammissibile del profitto si registra in $x_i^* = 0$, il che significa che l'output i -esimo non dovrebbe essere prodotto del tutto in una situazione ottimale, giacché un livello positivo di produzione in realtà riduce il profitto ($C_i(x) > R_i(x)$ per $x_i > 0$ e per tutti gli altri output ai loro livelli ottimali). Ma in $x_i^* = 0$ l'inclinazione della funzione di profitto è negativa, non è nulla, il che implica che la (7.2) non è una condizione necessaria per un ottimo, poiché un ottimo esiste in un punto dove non è soddisfatta. In questo caso il vincolo (7.3) è operante, poiché senza di esso l'impresa cercherebbe di aumentare il profitto producendo quantità negative di x_i . In (c) d'altra parte abbiamo una situazione in cui accade che esattamente in $x_i^* = 0$ la derivata del profitto si azzera.

Dalla discussione fatta fin qui traiamo la seguente generalizzazione. In un problema in cui vincoli di non-negatività sono imposti, le "condizioni necessarie" tipo (7.2) non sono più strettamente valide. Le condizioni appropriate possono essere dedotte dalla figura 12 (dove ora $f(x)$ rappresenta una qualsiasi funzione obiettivo e x_i^* il valore ottimo di x_i) e così esposte:

$$\begin{aligned} \text{(i) se } x_i^* > 0 \text{ allora } f_i(x^*) &= 0 \\ \text{(ii) se } x_i^* = 0 \text{ allora } f_i(x^*) &\leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (7.4)$$

La condizione (2) assicura che $f(x)$ non può essere aumentata per variazioni *permissibili*, cioè aumenti, in x_i . Un modo più conciso di scrivere le (7.4) è:

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad x_i^* \geq 0 \quad x_i^* \cdot f_i(x^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.5)$$

Il terzo termine, la condizione cioè che il prodotto di x_i^* e della sua derivata parziale sia nullo nel punto di ottimo, implica che la (7.2) si verifica *come caso particolare*, il caso cioè in cui tutte le variabili risultano positive al punto di ottimo cosicché i vincoli di non-negatività non sono operanti. È questo caso particolare quello che è normalmente ipotizzato implicitamente nei modelli economici standard.

Abbiamo appena visto che le condizioni necessarie per ottimi *non vincolati*

cessano di
induce ad
vincoli fun
stra un gra
no l'insiem

$$g(x_1, x_2)$$

dove i pun
di ottimo s
diagramma
ottimo glob
zioni neces

Il fatto e
di tangenza
la funzione
T. Abbiamo
contorno è

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1}{f_2}$$

Mediante un
siamo most

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g_1}{g_2}$$

Segue che l

$$\text{(i) } \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}$$

$$\text{(ii) } g(x_i^*)$$

Si noti che l
glicemente c
vidua con
determinare
e assicura ch
che la condi
line di c ne

La condiz

cessano di valere quando i più semplici vincoli diretti vengono imposti: ciò ci induce ad attenderci che nuove condizioni saranno necessarie quando esistano vincoli funzionali. Per investigarne la natura, consideriamo la figura 13, che mostra un grafico ormai familiare. La curva bb' e l'area grigia al di sotto illustrano l'insieme di punti che soddisfano il vincolo:

$$g(x_1, x_2) \leq b \quad (7.6)$$

dove i punti *sulla* curva soddisfano $g(x_1, x_2) = b$. Supponendo $f_1, f_2 > 0$, il punto di ottimo si trova in x^* sul contorno $f(x_1, x_2) = c$. Abbiamo quindi inserito nel diagramma le condizioni che assicurano che x^* esiste e rappresenta un unico ottimo globale di confine. Come può essere caratterizzato in termini di condizioni necessarie?

Il fatto essenziale con riguardo a x^* nella figura è che si tratta di un punto di tangenza. Ossia in x^* il contorno della funzione obiettivo f e il contorno della funzione di vincolo g hanno pendenza uguale a quella della comune tangente T . Abbiamo già mostrato (si veda l'equazione 2.9) che la pendenza di qualsiasi contorno è data da:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-f_1}{f_2} \quad (7.7)$$

Mediante un argomento del tutto simile (si provi a specificarne i dettagli) possiamo mostrare che la pendenza del contorno di vincolo è:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-g_1}{g_2} \quad (7.8)$$

Segue che la soluzione ottimale x^* soddisfa le condizioni:

$$(i) \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} \quad (7.9)$$

$$(ii) \quad g(x_1^*, x_2^*) = b$$

Si noti che la (2) è parte importante di queste condizioni. La (1) afferma semplicemente che le inclinazioni dei contorni devono essere le stesse, ma non individua con precisione il punto di ottimo — la singola equazione non può determinare i valori sia di x_1 che di x_2 . L'aggiunta della (2) chiude il sistema e assicura che ciò che abbiamo è effettivamente un punto di tangenza. (Si noti che la condizione $f(x_1^*, x_2^*) = c$ servirebbe lo stesso scopo se conoscessimo il valore di c nel punto di ottimo).

La condizione (1) può essere chiaramente riscritta come:

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \lambda^* > 0 \quad (7.10)$$

dove λ^* è semplicemente un numero rappresentante il comune valore dei rapporti f_i/g_i , $i=1,2$ nel punto di ottimo. Ma la (7.10) implica le due equazioni:

$$f_1 = \lambda^* g_1 \quad f_2 = \lambda^* g_2 \quad (7.11)$$

che sono logicamente equivalenti alla (1) della (7.9). Dato che $\lambda^* \neq 0$ e $g_i(x_1^*, x_2^*) \neq 0, i=1,2$, la (7.11) implica che al punto di ottimo $f_i \neq 0, i=1,2$. Perciò, come congetturato, le condizioni (7.2) (in questo caso, semplicemente $f_i=0$) non sono necessarie per un massimo *vincolato*. Nelle (7.11) e (7.9) si è mostrato che il punto di ottimo x^* della figura 13 soddisfa condizioni che possono essere scritte come segue:

$$\begin{aligned} f_1 - \lambda^* g_1 &= 0 \\ f_2 - \lambda^* g_2 &= 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) - b &= 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Come è sempre il caso di ragionamenti fatti con l'uso della geometria, abbiamo inserito nell'analisi un certo numero di ipotesi molto restrittive semplicemente tracciando un grafico. In particolare, abbiamo ipotizzato solo due variabili decisionali, nessuna condizione di non-negatività e solo un vincolo funzionale. Tuttavia, il modo di scrivere le condizioni in (7.12) suggerisce un progresso molto importante verso la generalizzazione dei nostri risultati, per mezzo di una pro-

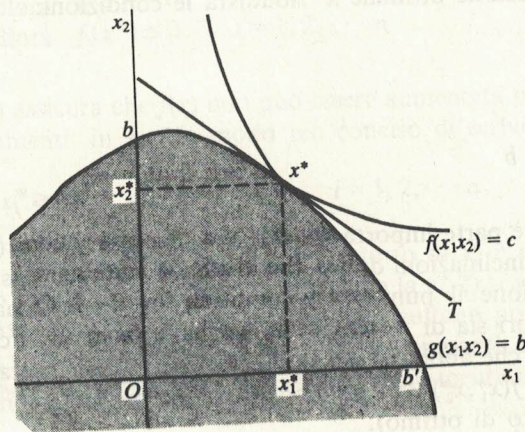


Fig. 13

Rammentiamo ora brevemente il significato logico di "condizione necessaria". Se la verità dell'affermazione P implica sempre la verità dell'affermazione Q , cioè $P \Rightarrow Q$, allora la verità di Q è una condizione necessaria per P — se Q è falsa P non può essere vera. Nel caso presente, abbiamo dalla teoria dell'ottimizzazione non vincolata che:

x^* è una soluzione al problema di Lagrange \Rightarrow , x^* soddisfa le condizioni (7.16)–(7.17) il che spiega perché queste sono dette condizioni necessarie. Possiamo ora mostrare che:

x^* è una soluzione all'iniziale problema vincolato (7.14) $\Rightarrow x^*$ è una soluzione al problema di Lagrange

cosicché x^* soddisfa le condizioni (7.16)–(7.17) e queste sono perciò condizioni necessarie per la soluzione del problema vincolato. Allo scopo di provare la seconda affermazione, si noti che la soluzione x^* dell'originario problema vincolato implica:

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (7.18)$$

per ogni x che soddisfi i vincoli:

$$g^j(x) - b_j = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (7.19)$$

Ma allora per ogni x dobbiamo avere che:

$$\sum_j \lambda_j^* [g^j(x) - b_j] = 0 \quad (7.20)$$

e quindi, sottraendo tale condizione da entrambi i membri della disuguaglianza (7.18) dà:

$$f(x^*) - \sum_j \lambda_j^* [g^j(x^*) - b_j] \geq f(x) - \sum_j \lambda_j^* [g^j(x) - b_j] \quad (7.21)$$

che è semplicemente l'affermazione:

$$L(x^*, \lambda^*) \geq L(x, \lambda^*) \quad (7.22)$$

per ogni x che soddisfi i vincoli (7.19). Ma sappiamo dalle condizioni necessarie (7.17) che qualsiasi x che non soddisfi i vincoli (7.19) non può massimizzare la funzione di Lagrange. Quindi la (7.22) ci dice che x^* è una soluzione al problema di Lagrange. Si noti che richiediamo che il vettore $\lambda^* = [\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*]$ esista, cosa data per scontata nella discussione sin qui effettuata.

Interpreta

Abbiamo
cendo i m
moltiplica
tematico
resse in sp
problema
per una so
"incognito
metro este
solvere pe
scrivere:

$$x_1^* = h_1$$

$$x_2^* = h_2$$

$$\lambda^* = h_\lambda$$

che sottoli
finiamo w
me nel pu

$$v^* = f(x^*)$$

Chiaramer

$$v^* = f(x^*)$$

Si conside
parametro
ne obietti
ficato di

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^*$$

In altre po
tivo varia
si noti da

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^*$$

Poiché tu
abbiamo

Interpretazione dei moltiplicatori di Lagrange

Abbiamo ottenuto le condizioni necessarie per un vettore ottimale x^* introducendo i moltiplicatori di Lagrange λ_j e formando la funzione di Lagrange. I moltiplicatori sono comunque qualcosa di più di un ingegnoso accorgimento matematico, perché in realtà possiedono un'interpretazione che è di grande interesse in specifici contesti economici. Per mostrare questo fatto, ritorniamo al problema a due variabili della figura 13. Date le condizioni necessarie (7.12) per una soluzione ottimale, possiamo guardare a esse come tre equazioni in tre "incognite" x_1^* , x_2^* e λ^* , con il valore del vincolo b rappresentante un parametro esterno che determina la soluzione. Sotto certe condizioni possiamo risolvere per le incognite come funzioni di questo parametro, cioè possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}x_1^* &= h_1(b) \\x_2^* &= h_2(b) \\ \lambda^* &= h_\lambda(b)\end{aligned}\tag{7.23}$$

che sottolinea l'idea che i valori della soluzione dipendono dal parametro b . Definiamo *valore ottimizzato*, v^* , della funzione obiettivo il valore che essa assume nel punto di ottimo, cioè:

$$v^* = f(x_1^*, x_2^*)\tag{7.24}$$

Chiaramente, quindi, v^* dipende da b , e così possiamo scrivere, usando la (7.23):

$$v^* = f(h_1(b), h_2(b)) = v^*(b)\tag{7.25}$$

Si consideri la derivata dv^*/db . Essa fornisce il tasso al quale le variazioni nel parametro di vincolo b inducono variazioni nel valore ottimizzato della funzione obiettivo, attraverso i suoi effetti sui valori della soluzione x_1^* e x_2^* . Il significato di λ^* scaturisce dal fatto che si può provare che:

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^*\tag{7.26}$$

In altre parole, λ^* misura il tasso a cui il valore ottimizzato della funzione obiettivo varia con variazioni nel parametro di vincolo. Per dimostrare questo fatto si noti dapprima che, dalla (7.25):

$$\frac{dv^*}{db} = f_1 \frac{dx_1^*}{db} + f_2 \frac{dx_2^*}{db}\tag{7.27}$$

Poiché tutte le derivate sono valutate al punto di ottimo, dalle condizioni (7.11) abbiamo che $f_1 = \lambda^* g_1$ e $f_2 = \lambda^* g_2$, e quindi:

$$\frac{dv^*}{db} = \lambda^* \left(g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} \right) \quad (7.28)$$

Ora, poiché il vincolo è soddisfatto nel punto di ottimo, abbiamo:

$$g(x_1^*, x_2^*) = b \quad (7.29)$$

quindi:

$$dg = g_1 dx_1^* + g_2 dx_2^* = db \quad (7.30)$$

e perciò:

$$\frac{dg}{db} = g_1 \frac{dx_1^*}{db} + g_2 \frac{dx_2^*}{db} = 1 \quad (7.31)$$

Allora sostituendo la (7.31) nella (7.28) fornisce l'uguaglianza (7.26). Possiamo interpretare questo risultato con l'aiuto della figura 14. Inizialmente il vincolo è definito da $g(x_1, x_2) = b$ e la soluzione è x^* . Si supponga ora che il vincolo diventi $g(x_1, x_2) = b'$, con $b' > b$, e la curva in figura si sposti all'infuori. Vi sarà una nuova soluzione x^{**} , con valori ottimi x_1^{**} , x_2^{**} . La variazione in b ha indotto una variazione nel valore ottimizzato della funzione obiettivo dato da:

$$f(x_1^{**}, x_2^{**}) - f(x_1^*, x_2^*) = v^{**} - v^* \quad (7.32)$$

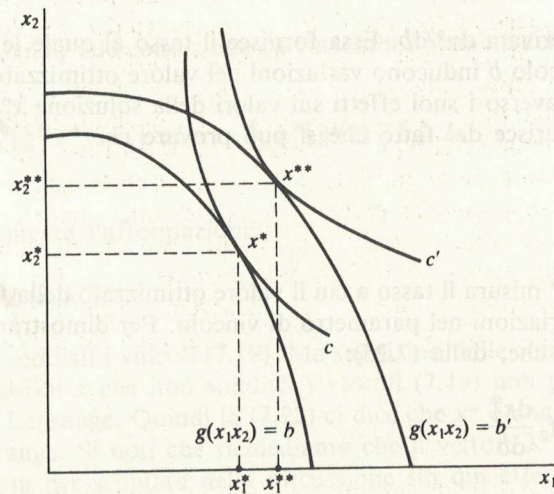


Fig. 14

Quindi possiamo prendere il rapporto di queste variazioni:

$$\frac{\Delta v^*}{\Delta b} = \frac{v^{**} - v^*}{b' - b} \quad (7.33)$$

che si riferisce a una variazione finita in b . Allora, come al solito, prendiamo il limite:

$$\lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{\Delta v^*}{\Delta b} = \frac{dv^*}{db} \quad (7.34)$$

Possiamo perciò pensare al vincolo che si sposta in modo infinitesimale e la derivata dv^*/db misura il tasso a cui v^* varia, dato che un punto di ottimo è sempre selezionato.

In Economia, le derivate sono normalmente designate con il termine di “qualcosa” *marginale*. L’uguaglianza in (7.26) implica che λ^* può essere visto come la variazione marginale nel valore ottimizzato della funzione obiettivo rispetto a variazioni nel vincolo. In contesti specifici ciò porta a utili interpretazioni dei moltiplicatori di Lagrange. Per esempio, nel caso in cui il consumatore massimizza l’utilità (la funzione obiettivo) soggetta a un vincolo di bilancio ($b = \text{reddito}$), λ^* misura l’*utilità marginale del reddito* nel punto di ottimo. In un problema in cui i costi sono da minimizzarsi, soggetti a un vincolo di output fisso ($b = \text{output}$), λ^* misura il *costo marginale* nel punto di ottimo. In ogni problema, il moltiplicatore di Lagrange possiede un’interpretazione di interesse per gli economisti.

Un’ulteriore interpretazione che può essere attribuita al moltiplicatore di Lagrange è quella di una specie di prezzo. Poiché il suo valore all’ottimo misura la variazione nel valore della funzione obiettivo causato da un leggero spostamento del vincolo, esso può essere interpretato come misura del “pagamento” massimo da effettuarsi *in cambio* di una spostamento del vincolo. Supponiamo per esempio che il problema sia quello di massimizzare il profitto selezionando livelli di input e output soggetto a limitazioni nella quantità disponibile di un certo input ($b = \text{quantità dell’input}$). Allora λ^* in un simile problema misura la profittabilità marginale dell’input, o il tasso a cui il profitto massimo cresce per un piccolo aumento nella quantità fissa di quell’input. Ne segue che λ^* misura l’ammontare massimo che l’impresa sarebbe disposta a pagare per l’aumento nell’input, poiché una minore quantità provocherebbe un aumento netto nel profitto e una maggiore provocherebbe una riduzione netta. Per questa ragione, λ^* è detto *prezzo-ombra* dell’input, dove il termine “ombra” sta a significare che tale prezzo può essere diverso dal prezzo di mercato dell’input stesso.

Esercizi

1. Rappresentare a due e tre dimensioni il caso in cui una funzione monotona crescente assume un valore massimo rispetto a un insieme ammissibile chiuso

e limitato. Da ciò si spieghi perché la condizione (7.1) non è necessaria per un massimo locale in un problema di ottimizzazione vincolata.

2. Fornire delle ragioni per cui ipotizziamo che m , il numero di vincoli, sia minore di n , il numero di variabili decisionali, nel formulare il problema di ottimizzazione (7.14) (*Suggerimento*: supporre che le funzioni di vincolo siano lineari e $m > n$ per $n = 1, 2$. Quali problemi sorgono? Spiegare perché tale restrizione è superflua quando i vincoli funzionali consistono in disuguaglianze).
- 3.* Spiegare perché le condizioni (7.16) e (7.17) sono anche necessarie per una soluzione al problema:

$$\min f(x) \text{ soggetto a } g^j(x) - b_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

e quindi perché tali condizioni sono necessarie ma non sufficienti per un massimo.

- 4.* Si interpretino in termini economici i moltiplicatori di Lagrange associati ai vincoli dei seguenti problemi di ottimizzazione:
 - 1) Il pianificatore centrale di un paese in via di sviluppo desidera massimizzare il PNL soggetto ai vincoli che il deficit di bilancia dei pagamenti non ecceda un certo ammontare e che un dato numero di lavoratori specializzati sia disponibile.
 - 2) Un'impresa vuole scegliere una serie di progetti d'investimento che massimizzano la sua profittabilità, soggetto al requisito che la spesa totale per investimento non superi un ammontare fisso di fondi disponibili.
- 5.* Considerare il problema:

$$\max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) \text{ dove } f_1, f_2 > 0$$

$$\text{soggetto a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

La funzione obiettivo f è strettamente quasi-concava e gli a_{ij} , $i, j = 1, 2$, sono tutti positivi.

- a) Tracciare in un diagramma l'insieme ammissibile, ipotizzando:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} > \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad \text{e} \quad \frac{b_1}{a_{12}} > \frac{b_2}{a_{22}}$$

Trovare i punti di soluzione e suggerire le loro principali caratteristiche, nel senso che implicano valori delle variabili nulli o non-nulli e vincoli operanti o non operanti.

- b) Rammentando l'interpretazione dei moltiplicatori di Lagrange, fornire un'interpretazione economica del caso $\lambda_1^* = 0$.
- 6.* Mostrare che, così come $(x^* = \text{soluzione del problema vincolato}) \Rightarrow (x^* = \text{soluzione del problema di Lagrange})$, anche la relazione inversa è verificata,

e che quindi x^* è una soluzione del problema vincolato *se e solo se* è una soluzione del problema di Lagrange.

8. Ulteriori generalizzazioni

Nel paragrafo precedente abbiamo generalizzato la procedura di Lagrange al caso di $n \geq 2$ variabili e $m \geq 1$ vincoli, ma il lettore si sarà reso conto del fatto che due ipotesi particolari sono rimaste. Primo, non abbiamo considerato vincoli diretti del tipo $x_i \geq 0$. Secondo, abbiamo ipotizzato che nella formulazione del problema (7.14) i vincoli fossero espressi come uguaglianze, il che non è solamente restrittivo ma può anche indurre delle difficoltà, come la Domanda 2 degli Esercizi precedenti ha mostrato. Vogliamo ora generalizzare entrambe queste ipotesi.

Le conseguenze derivanti dall'introduzione di condizioni di non-negatività possono essere immediatamente dedotte dalla discussione con la quale abbiamo iniziato il paragrafo precedente. Ricordiamo che se una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$ è da massimizzare soggetta ai vincoli $x_i \geq 0$ per almeno un i , allora le corrette condizioni necessarie per la variabile i diventano:

$$f_i(x^*) \leq 0 \quad x_i^* \geq 0 \quad x_i^* \cdot f_i(x^*) = 0 \quad (8.1)$$

dove $f_i(x^*)$ è come prima la derivata parziale i -esima valutata nel punto di ottimo. Abbiamo prima mostrato che quando vincoli *funzionali* siano imposti, possiamo rimpiazzare il problema di massimizzazione vincolata con un appropriato problema di massimizzazione non vincolata utilizzando la procedura di Lagrange. Per cui se esistono condizioni di non-negatività, semplicemente le imponiamo nel problema di ottimizzazione di Lagrange ottenendo le seguenti condizioni necessarie:

$$L_i = f_i(x^*) - \sum_j \lambda_j^* g_j^i(x^*) \leq 0 \quad x_i^* \geq 0 \quad x_i^* \cdot L_i = 0 \quad (8.2)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$L_j = b_j - g^j(x^*) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8.3)$$

Quindi la funzione di Lagrange $L(x, \lambda)$ rimpiazza semplicemente la funzione f nelle condizioni (8.1). Si noti che non è stato necessario vincolare i moltiplicatori di Lagrange cosicché le condizioni (8.3) sono esattamente come prima.

A scopo d'illustrazione, consideriamo il problema a due variabili:

$$\max f(x_1, x_2) \text{ soggetto a } a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \quad x_1, x_2 \geq 0 \quad f_1, f_2 > 0 \quad (8.4)$$

dove f è ipotizzata strettamente quasi-concava. Tuttavia, supponiamo che i contorni della funzione obiettivo abbiano dappertutto pendenza più ripida della li-

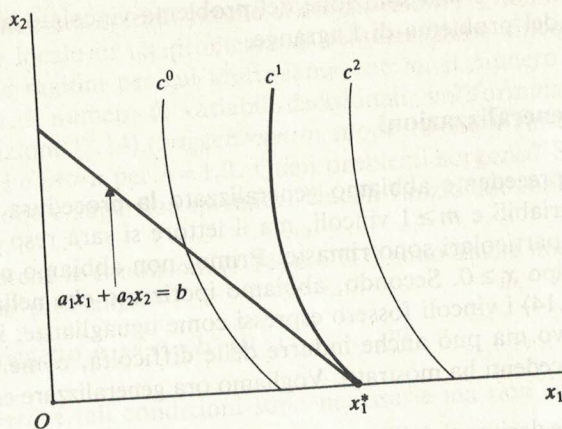


Fig. 15

nea di vincolo, come emerge dalla figura 15. La funzione di Lagrange per questo problema è:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[a_1x_1 + a_2x_2 - b] \quad (8.5)$$

e corrispondenti alle condizioni (8.2)–(8.3) sono:

$$L_1 = f_1 - \lambda^* a_1 \leq 0 \quad x_1^* \geq 0 \quad x_1^* \cdot [f_1 - \lambda^* a_1] = 0 \quad (8.6)$$

$$L_2 = f_2 - \lambda^* a_2 \leq 0 \quad x_2^* \geq 0 \quad x_2^* \cdot [f_2 - \lambda^* a_2] = 0 \quad (8.7)$$

$$-L_\lambda = a_1x_1^* + a_2x_2^* - b = 0 \quad (8.8)$$

Si supponga ora, come in figura, che nel punto di ottimo $x_1^* > 0$ e $x_2^* = 0$. Dalla (8.6) dobbiamo avere (si provi a spiegare perché):

$$f_1 = \lambda^* a_1 \quad (8.9)$$

mentre dalla (8.7) abbiamo:

$$f_2 \leq \lambda^* a_2 \quad (8.10)$$

Dividendo ciascun membro della (8.10) per il corrispondente membro della (8.9) si ottiene:

$$f_1/f_2 \geq \frac{a_1}{a_2} \quad (8.11)$$

che è semplice
la funzione
Ciò è in rea
in presenza
punto di ott
mo ovviame

Rivolgend
possiamo an
punti di "m
ria. Poiché i
nissimo espr
La generaliz

Il problem

$\max f(x)$

Supponiamo
modifica ne

$g^j(x^*) = b$

Per provare
valore b_j' ris
simizzato di

$g^j(x^*) = b$

e quindi se
suo livello in
contraddizio
re massimiz

$g^j(x^*) < b$

cioè variazi
Unendo (

$b_j - g^j(x^*)$

come condi
Questo fa
di Lagrange
simizzazione

$L(x, \lambda) =$

che è semplicemente la condizione per cui, nel punto di ottimo, il contorno della funzione obiettivo deve essere almeno tanto ripido quanto la linea di vincolo. Ciò è in realtà tutto quello che può essere detto nel caratterizzare un ottimo in presenza di vincoli di non-negatività e quando uno di essi sia operante nel punto di ottimo. Notare che se all'ottimo abbiamo $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$ allora abbiamo ovviamente le condizioni necessarie del tipo esposto nel paragrafo 7.

Rivolgendo ora l'attenzione al caso di disuguaglianze nei vincoli funzionali, possiamo anzitutto notare che in problemi a singolo vincolo la non-esistenza di punti di "maximum maximorum" rende questa generalizzazione non necessaria. Poiché in tal caso una soluzione giacerà sempre sul confine, possiamo benissimo esprimere il vincolo in forma di uguaglianza, come nel problema (8.4). La generalizzazione diventa però importante nel caso di due o più vincoli.

Il problema generale è:

$$\max f(x) \text{ soggetto a } g^j(x) \leq b_j \quad x \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (8.12)$$

Supponiamo che x^* risolva (8.12) e si denoti con λ_j^* il valore marginale di una modifica nel vincolo j -esimo, cioè un aumento in b_j . Allora:

$$g^j(x^*) = b_j \Rightarrow \lambda_j^* \geq 0 \quad (8.13)$$

Per provare questo fatto si supponga che $\lambda_j^* < 0$. Allora una riduzione in b_j al valore b_j' risulterà in una nuova soluzione $x^{*'}$ e in un aumento del valore massimizzato di f da $f(x^*)$ a $f(x^{*'})$. Ma:

$$g^j(x^{*'}) = b_j' < b_j \quad (8.14)$$

e quindi se il vincolo può essere soddisfatto come uguaglianza quando b_j è al suo livello iniziale, x^* non può essere una soluzione al problema (8.12). Questa contraddizione stabilisce la (8.13). Dal momento che λ_j^* è il tasso a cui il valore massimizzato di f cresce per aumenti in b_j , abbiamo pure:

$$g^j(x^*) < b_j \quad \lambda_j^* = 0 \quad (8.15)$$

cioè variazioni marginali in vincoli non operanti non hanno valore.

Unendo (8.13) e (8.15) si ottiene:

$$b_j - g^j(x^*) \geq 0; \quad \lambda_j^* \geq 0; \quad \lambda_j^* [b_j - g^j(x^*)] = 0 \quad (8.16)$$

come condizione necessaria per la soluzione di (8.12).

Questo fatto suggerisce che ancora una volta possiamo adattare la procedura di Lagrange al fine di trovare condizioni necessarie al problema generale di ottimizzazione (8.12). La funzione di Lagrange del problema è:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_j [g^j(x) - b_j] \quad (8.17)$$

e le condizioni necessarie per una soluzione sono:

$$L_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = f_i - \sum \lambda_j^* g_j^i \leq 0; \quad x_i^* \geq 0; \quad x_i^* \cdot L_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8.18)$$

$$L_j = \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = b_j - g^j(x^*) \geq 0; \quad \lambda_j^* \geq 0; \quad \lambda_j^* \cdot L_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (8.19)$$

dove la (8.18) non è altro che la (8.2) e la (8.19) altro che la (8.3). Mediante un argomento analogo a quello usato discutendo la massimizzazione di $f(x)$ soggetta a $x \geq 0$, è evidente che $L(x, \lambda)$ è massimizzata rispetto a x e minimizzata rispetto ai λ_j soggetta solo ai vincoli $x \geq 0$ e $\lambda \geq 0$. (Quando $L_j > 0$, λ_j è scelto quanto più piccolo possibile, cioè zero.) È ovviamente possibile dimostrare assai più rigorosamente che le condizioni necessarie per risolvere il problema di Lagrange soggetto a vincoli di non-negatività per x e λ sono pure necessarie per una soluzione della (8.11), ma la spiegazione intuitiva data qui sopra sarà sufficiente per i nostri intenti.

Allo scopo di illustrare la procedura sopra delineata si consideri il problema:

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) \text{ soggetto a } a_1 x_1 + a_2 x_2 &\leq b_1 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 &\leq b_2 \quad f_1, f_2 > 0, \end{aligned} \quad (8.20)$$

dove per semplicità ignoriamo vincoli di non-negatività. Il problema è rappresentato graficamente nella figura 16. È ipotizzato che i vincoli siano tali da intersecarsi nel quadrante positivo, cosicché l'insieme ammissibile è dato dall'area grigia. I punti α , β e γ rappresentano possibili soluzioni per ipotesi differenti circa i contorni della funzione obiettivo.

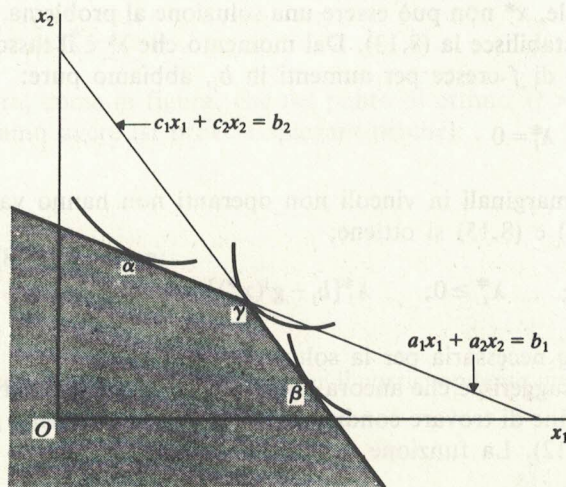


Fig. 16

La funzione

$$L(x_1, x_2,$$

e condizioni

$$f_1 - \lambda_1^* a_1$$

$$f_2 - \lambda_1^* a_2 -$$

$$a_1 x_1^* + a_2 x_2^*$$

$$c_1 x_1^* + c_2 x_2^*$$

Stabiliamo

ni (8.22) - (8.2

b_2 è non oper

vincolo è zero

abbiamo la co

caso α $f_1 -$

Queste sono co

ra di Lagrange

vincolo b_1 espr

Consideriamo

li movimenti di

caso abbiamo l

caso β $f_1 - \lambda$

Ancora una volta

cedura di Lagra

Nel terzo caso

soddisfatti come

to). A rigore, le

(x_1^*, x_2^*) , sono in

(8.22) e (8.23) ve

$$f_1/f_2 = \frac{\lambda_1^* a_1 + \lambda_2^* a_2}{\lambda_1^* a_1 + \lambda_2^* a_2}$$

La funzione di Lagrange è:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2) - \lambda_1[a_1x_1 + a_2x_2 - b_1] - \lambda_2[c_1x_1 + c_2x_2 - b_2] \quad (8.21)$$

e condizioni necessarie sono:

$$f_1 - \lambda_1^* a_1 - \lambda_2^* c_1 = 0 \quad (8.22)$$

$$f_2 - \lambda_1^* a_2 - \lambda_2^* c_2 = 0 \quad (8.23)$$

$$a_1x_1^* + a_2x_2^* - b_1 \leq 0; \quad \lambda_1^* \geq 0; \quad \lambda_1^*[a_1x_1^* + a_2x_2^* - b_1] = 0 \quad (8.24)$$

$$c_1x_1^* + c_2x_2^* - b_2 \leq 0; \quad \lambda_2^* \geq 0; \quad \lambda_2^*[c_1x_1^* + c_2x_2^* - b_2] = 0 \quad (8.25)$$

Stabiliamo ora la relazione tra le possibili soluzioni della figura e le condizioni (8.22) – (8.25). Nel caso di una soluzione nel punto α abbiamo che il vincolo b_2 è non operante. Ne segue che $\lambda_2^* = 0$ (intuitivamente: il prezzo-ombra di un vincolo è zero). Perciò il termine che include λ_2^* nelle (8.22) e (8.23) cade ed abbiamo la condizione per il:

$$\text{caso } \alpha \quad f_1 - \lambda_1^* a_1 = 0 \quad f_2 - \lambda_1^* a_2 = 0 \quad a_1x_1^* + a_2x_2^* = b_1 \quad (8.26)$$

Queste sono condizioni standard che risultano dall'applicazione della procedura di Lagrange all'appropriato problema con singolo vincolo, cioè con il solo vincolo b_1 espresso come uguaglianza.

Consideriamo ora il caso β . Qui il vincolo b_1 è non operante. Quindi piccoli movimenti di questo non avranno effetto sul punto di ottimo e $\lambda_1^* = 0$. In tale caso abbiamo le condizioni per il:

$$\text{caso } \beta \quad f_1 - \lambda_2^* c_1 = 0 \quad f_2 - \lambda_2^* c_2 = 0 \quad c_1x_1^* + c_2x_2^* = b_2 \quad (8.27)$$

Ancora una volta otteniamo le appropriate condizioni dall'applicazione della procedura di Lagrange all'appropriato problema con singolo vincolo.

Nel terzo caso *entrambi* i vincoli sono operanti nel punto di ottimo, e sono soddisfatti come uguaglianze (ma si veda la Domanda 9* degli Esercizi qui sotto). A rigore, le condizioni (8.24) – (8.25), la cui soluzione determina il punto (x_1^*, x_2^*) , sono in questo caso sufficienti per la soluzione del problema. Dalle (8.22) e (8.23) vediamo che:

$$f_1/f_2 = \frac{\lambda_1^* a_1 + \lambda_2^* c_1}{\lambda_1^* a_2 + \lambda_2^* c_2} \quad (8.28)$$

cioè al punto di ottimo la pendenza del contorno della funzione obiettivo *non è uguale* alla pendenza di nessuno dei vincoli, ma giace fra tali inclinazioni (si veda la Domanda 9* degli Esercizi qui sotto).

Possiamo trarre le seguenti conclusioni da questa discussione. Le condizioni necessarie che derivano dall'applicazione della procedura di Lagrange *come se* il problema avesse solo vincoli di uguaglianza sono valide solamente nel caso particolare dove tutti i vincoli risultano essere operanti nel punto di ottimo — una situazione che può non esistere persino come possibilità logica se l'insieme dei punti che soddisfano i vincoli come uguaglianze è vuoto. Allora le altre possibili soluzioni sono sistematicamente esplorate considerando tutte le combinazioni possibili di vincoli non operanti ed esaminando le condizioni con gli appropriati vincoli e termini cancellati. Quindi la procedura di Lagrange può essere utilizzata per trattare problemi di ottimizzazione più generali di quelli per la quale era stata originariamente concepita.

Esercizi

- 1.* Si ripeta l'argomento formale usato per giustificare la procedura di Lagrange nel paragrafo 7 per dimostrare che le condizioni (8.2) e (8.3) sono effettivamente condizioni necessarie per il problema:

$$\max f(x) \text{ soggetto a } g^j(x) = b; \quad j = 1, \dots, m \quad \text{e } x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$
- 2.* Spiegare perché la condizione (8.7) *non giustifica* l'affermazione: $x_2^* = 0 \Rightarrow f_2 < \lambda^* a_2$. Come interpretereste il caso in cui $x_2^* = 0$ e $f_2 = \lambda^* a_2$?
- 3.* Dopo aver letto il Capitolo 3, si ritorni su questo problema e si discuta l'interpretazione del caso analizzato in figura 15 come un problema di domanda del consumatore. È questo tipo di soluzione, con consumo ottimale di un bene nullo, realistico?
- 4.* Introdurre nel problema (8.20) i vincoli diretti $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Mostrare in figura 16 due ulteriori possibili soluzioni degne d'interesse. Usare le condizioni (8.6) e (8.7) congiuntamente alle (8.24) e (8.25) per analizzare questi due ulteriori casi. Da ciò discutere la generalizzazione della procedura di Lagrange a problemi in cui siano presenti sia le condizioni di non-negatività che disuguaglianze nei vincoli funzionali.
- 5.* Si supponga che, anziché dei vincoli diretti $x_i \geq 0$, si abbia $x_i \geq b_i$, $b_i \neq 0$. Mostrare come la procedura di Lagrange può essere adattata a questa situazione (*Suggerimento*: si ridefiniscano le variabili x_i così da mettere i vincoli diretti in forma non-negativa oppure si trattino i nuovi vincoli come un tipo particolare di vincoli funzionali).
- 6.* Supponiamo di aggiungere al problema (8.20) l'ulteriore vincolo $e_1 x_1 + e_2 x_2 \leq b_3$. Discutere le possibilità di soluzione e le condizioni necessarie per questo problema lungo le linee dell'analisi dei casi α , β e γ in questo paragrafo.

7.* R
ma
de
me
di
zi
po
ced
tip
8. Mo
gia
9.* Ne
ne
esse
pur
si c
l'es
può

9. Con

Nel pres
l'ottimiz
mi sono
Speriam
delle ide
mi che c
vare con
maggior
e una m

Note

1. Questo
re un
 $f(x) =$
il prim
sente c
pari a
2. Questa
do f''
condizi

- 7.* *Razionamento.* Si legga dapprima il Capitolo 3 e poi si torni su questa domanda. Nel problema (8.20) interpretiamo a_1 e a_2 come i prezzi monetari dei beni corrispondenti e b_1 come il reddito monetario; c_1 e c_2 sono il numero dei tagliandi di razionamento che pure devono essere pagati per unità di ciascun bene e b_2 è la dotazione iniziale di tali tagliandi. f è una funzione di utilità. Date un'interpretazione economica del problema e delle tre possibilità di soluzione illustrate in figura 16. Cosa vi aspettereste che succeda se alcuni consumatori sono all'equilibrio di tipo α e altri a quello di tipo β ?
8. Mostrare che se $\lambda_1^*, \lambda_2^* > 0$, il valore del rapporto $\lambda_1^* a_1 + \lambda_2^* c_1 / \lambda_1^* a_2 + \lambda_2^* c_2$ deve giacere tra i valori a_1/a_2 e c_1/c_2 .
- 9.* Nella figura 16 potrebbero verificarsi due casi alquanto strani. La soluzione potrebbe trovarsi in γ , ma il contorno della funzione obiettivo potrebbe essere (a) tangente al vincolo b_1 , oppure (b) tangente al vincolo b_2 , in quel punto. Cosa accade alle condizioni (8.21) – (8.25) in tal caso? (*Suggerimento:* si consideri cosa succede nel caso (a) in cui il vincolo b_2 si sposta verso l'esterno e verso l'interno, e nel caso (b) in cui b_1 si sposta. Che cosa si può dire circa il moltiplicatore di Lagrange rilevante in ciascun caso?)

9. Conclusioni

Nel presente capitolo abbiamo discusso gli elementi principali della teoria dell'ottimizzazione. L'approccio è stato intuitivo, anziché rigoroso: le proposizioni sono state in generale esposte e poi illustrate piuttosto che dimostrate. Speriamo comunque che il lettore abbia a questo punto una buona padronanza delle idee più importanti – le proprietà rilevanti di insiemi e funzioni, i problemi che ci poniamo riguardo alle soluzioni, e la procedura di Lagrange per derivare condizioni necessarie. A tale comprensione dovrebbe accompagnarsi una maggiore familiarità con i modelli economici presentati in varie parti del libro, e una maggiore abilità nell'impiegarli nell'analisi di problemi economici.

Note

1. Questo fatto non è restrittivo. Si supponga che il problema sia di minimizzare una certa funzione $h(x)$. Allora ciò è equivalente a massimizzare $f(x) = -h(x)$, poiché una soluzione a questo secondo problema risolve anche il primo. Facendo uso di questo fatto, tutte le affermazioni avanzate nel presente capitolo circa problemi di massimizzazione possono essere applicate pari pari a problemi di minimizzazione.
2. Questa affermazione non è del tutto rigorosa: problemi possono sorgere quando $f''(x^*) = 0$ in un punto di massimo relativo x^* , cosicché le appropriate condizioni necessarie e sufficienti devono essere definite in termini di deriva-

te di ordine superiore. Per una discussione si veda R.G.D. Allen, *Mathematical Analysis for Economists*, MacMillan, 1938, Capitolo XIV.

3. Il fatto che \bar{f} giaccia sulla corda verticalmente al di sopra di \bar{x} scaturisce dalla proprietà delle linee rette. Perciò, dati due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , i punti sulla retta che li congiunge sono dati da:

$$\begin{aligned}(\bar{x}, \bar{y}) &= k(x_1, y_1) + (1-k)(x_2, y_2) \\ &= (kx_1 + (1-k)x_2, ky_1 + (1-k)y_2) \quad \text{per } 0 \leq k \leq 1\end{aligned}$$

Nella discussione presente abbiamo semplicemente $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ per una certa funzione $f(x)$.

4. Di nuovo, una funzione $h(x)$ è detta quasi-concava se $f(x) = -h(x)$ è quasi-concava. Il lettore dovrebbe tracciare il contorno di una funzione quasi-concava, sulla base dell'ipotesi che le sue derivate parziali siano positive. Dovrebbe allora mostrare nello spazio a due dimensioni che se la funzione $g(x_1, x_2)$, con $g_1, g_2 > 0$ è quasi-concava, allora l'insieme di punti che soddisfano $g(x_1, x_2) \leq b$ è convesso.

Riferimenti bibliografici e ulteriori letture

Il lettore con una buona preparazione matematica troverà una trattazione rigorosa del materiale presentato in questo capitolo in:

M.D. Intriligator. *Mathematical Optimisation and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971, Capitoli 2-4,

e in:

H. Nikaido. *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, North-Holland, Amsterdam, 1970, Capitoli 2, 4-6.

Un approccio meno pesantemente matematico, che propone anche ampie applicazioni dei concetti di questo capitolo, è costituito da:

T. Koopmans. *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill, Londra, 1957, Capitolo 1,

e un'eccellente esposizione della struttura, proprietà e usi dei problemi di ottimizzazione in Economia è:

A. Dixit. *Optimization in Economic Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1976.

L'ipotesi
di fronte
di consum
anzitutto
certe cond
ta ottimal
Nell'ana
struiremo
na di spe
consumato
buono qua
reddito del
generale),
mente, app
ferenze de
e definire l

1. L'ordin

Un paniere

$$x = (x_1, x_2)$$

dove $x_i, i = 1, 2$
ciascun x_i sia
le o positive
disponibili in
Il significat
li definiamo in
no comprend
"Io sono indi