

Calcolo delle probabilità

terza edizione

Sheldon M. Ross

Edizione italiana a cura di
Marco Ferrante e Carlo Mariconda

Dal catalogo Apogeo

Matematica e statistica

Anderson, Sweeney, Williams, *Statistica per le analisi economico-aziendali*
Bee, Santi, *Finanza quantitativa con R*
Barutello, Conti, Ferrario, Terracini, Verzini, *Analisi matematica. 2.*
Con elementi di geometria e calcolo vettoriale
Bland, *Statistica medica*
Conti, Ferrario, Terracini, Verzini, *Analisi matematica. 1. Dal calcolo all'analisi*
Crivellari, *Analisi statistica dei dati con R*
Espa, Micciolo, *Problemi ed esperimenti di statistica con R*
Espa, Micciolo, *Analisi esplorativa dei dati con R*
Laganà, Leoni, Stampacchia, *Matematica e logica. Mettiti alla prova*
Luenberger, *Finanza e investimenti. Fondamenti matematici*
Mariconda, Tonolo, *Calcolo discreto. Metodi per contare*
Micciolo, Espa, Canal, *Ricerca con R. Metodi di inferenza statistica*
Middleton, *Analisi statistica con Excel*
Moore, *Statistica di base*, seconda edizione
Naldi, Pareschi, *Matlab. Concetti e progetti*, seconda edizione
Romano, *Meccanica analitica*
Ross, *Introduzione alla statistica*
Ross, *Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze*, seconda edizione
Stewart, *Calcolo. 1. Funzioni di una variabile*
Stewart, *Calcolo. 2. Funzioni di più variabili*
Strang, *Algebra lineare*
Tommei, *Matematica di base*
Waner, Costenoble, *Strumenti quantitativi per la gestione aziendale.*
Welkowitz, Cohen, Ewen, *Statistica per le scienze del comportamento*

APOGEO

Calcolo delle probabilità, terza edizione

Titolo originale:

A first course in probability, 9th ed.

Autore:

Sheldon M. Ross

Copyright © 2014 – Pearson Education, Inc.

Copyright © 2013 – APOGEO – IF Idee editoriali Feltrinelli s.r.l.

Socio Unico Giangiacomo Feltrinelli Editore s.r.l.

Via Natale Battaglia, 12 – 20127 Milano (Italy)

Telefono: 02-289981 (5 linee r.a.) – Telefax: 02-26116334

Email education@apogeeonline.com

U.R.L. <http://www.apogeeonline.com>

ISBN 978-88-503-3251-9

Traduzione: Carlo Mariconda e Marco Ferrante

Impaginazione elettronica: Grafica Editoriale – Vimercate

Editor: Alberto Kratter Thaler


Copertina e progetto grafico: Enrico Marcandalli

Tutti i diritti sono riservati a norma di legge e a norma delle convenzioni internazionali. Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta con sistemi elettronici, meccanici o altri, senza l'autorizzazione scritta dell'Editore.

Nomi e marchi citati nel testo sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali, Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano, e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org.

Finito di stampare nel mese di settembre 2013
presso  Grafica Veneta – Trebaseleghe (PD)

A Rebecca

Sommario

PRESENTAZIONE DELL'EDIZIONE ITALIANA	xiii
PREFAZIONE	xv
1 ANALISI COMBINATORIA	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Il principio fondamentale del calcolo combinatorio	1
1.3 Permutazioni	3
1.4 Combinazioni	5
1.5 Coefficienti multinomiali	9
1.6 Il numero di soluzioni intere di una equazione	13
Riassunto	15
Esercizi	16
Esercizi teorici	19
Esercizi di autovalutazione	22
2 ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ	25
2.1 Introduzione	25
2.2 Spazio campionario ed eventi	25
2.3 Assiomi della probabilità	29
2.4 Alcune semplici proprietà	32
2.5 Spazi campionari con esiti equiprobabili	37
2.6 La probabilità come funzione di insieme continua	48
2.7 La probabilità come una misura della fiducia	53
Riassunto	54
Esercizi	55
Esercizi teorici	61
Esercizi di autovalutazione	64
3 PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA	67
3.1 Introduzione	67
3.2 Probabilità condizionata	67

3.3	La formula di Bayes	73
3.4	Eventi indipendenti	88
3.5	$P(\cdot F)$ è una probabilità	104
	Riassunto	112
	Esercizi	113
	Esercizi teorici	125
	Esercizi di autovalutazione	130
4	VARIABILI ALEATORIE	135
4.1	Variabili aleatorie	135
4.2	Variabili aleatorie discrete	140
4.3	Valore atteso	142
4.4	Valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria	145
4.5	Varianza	149
4.6	Le variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali	151
	4.6.1 Proprietà delle variabili aleatorie binomiali	156
	4.6.2 Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile binomiale	160
4.7	La variabile aleatoria di Poisson	161
	4.7.1 Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile di Poisson	173
4.8	Ulteriori distribuzioni di probabilità discrete	174
	4.8.1 La variabile aleatoria geometrica	174
	4.8.2 La variabile aleatoria binomiale negativa	176
	4.8.3 La variabile aleatoria ipergeometrica	179
	4.8.4 La distribuzione Zeta (o Zipf)	182
4.9	Valore atteso della somma di variabili aleatorie	183
4.10	Proprietà delle funzioni di distribuzione	188
	Riassunto	190
	Esercizi	192
	Esercizi teorici	202
	Esercizi di autovalutazione	208
5	VARIABILI ALEATORIE CONTINUE	213
5.1	Introduzione	213
5.2	Valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua	217
5.3	La variabile aleatoria uniforme	222
5.4	Variabili aleatorie normali	225
	5.4.1 L'approssimazione normale della distribuzione binomiale	232
5.5	Variabili aleatorie esponenziali	236
	5.5.1 Funzioni di rischio	240
5.6	Altre distribuzioni continue	242
	5.6.1 La distribuzione Gamma	242

	5.6.2 La distribuzione di Weibull	245
	5.6.3 La distribuzione di Cauchy	245
	5.6.4 La distribuzione Beta	246
5.7	La distribuzione di una funzione di variabile aleatoria	248
	Riassunto	250
	Esercizi	253
	Esercizi teorici	257
	Esercizi di autovalutazione	260
6	LEGGI CONGIUNTE DI VARIABILI ALEATORIE	265
6.1	Funzioni di distribuzione congiunte	265
6.2	Variabili aleatorie indipendenti	273
6.3	Somme di variabili aleatorie indipendenti	286
	6.3.1 Variabili aleatorie uniformemente distribuite	286
	6.3.2 Variabili aleatorie Gamma	288
	6.3.3 Variabili aleatorie normali	290
	6.3.4 Variabili aleatorie di Poisson e binomiali	294
6.4	Distribuzioni condizionate: il caso discreto	295
6.5	Distribuzioni condizionate: il caso continuo	298
6.6	Statistiche ordinate	304
6.7	Distribuzioni congiunte di funzioni di variabili aleatorie	308
6.8	Variabili aleatorie scambiabili	316
	Riassunto	319
	Esercizi	321
	Esercizi teorici	327
	Esercizi di autovalutazione	331
7	PROPRIETÀ DEL VALORE ATTESO	335
7.1	Introduzione	335
7.2	Valore atteso di somme di variabili aleatorie	336
	7.2.1 Ottenere delle stime dal valore atteso con il metodo probabilistico	349
	7.2.2 L'identità dei massimi e minimi	351
7.3	I momenti del numero di eventi che si realizzano	353
7.4	Covarianza, varianza di una somma e correlazioni	361
7.5	Valore atteso condizionato	370
	7.5.1 Definizioni	370
	7.5.2 Calcolo dei valori attesi con il condizionamento	372
	7.5.3 Calcolo delle probabilità con il condizionamento	383
	7.5.4 Varianza condizionata	387
7.6	Valore atteso condizionato e predizione	389

7.7	Funzioni generatrici dei momenti	394
7.7.1	Funzioni generatrici dei momenti congiunti	403
7.8	Ulteriori proprietà delle variabili aleatorie normali	405
7.8.1	La distribuzione normale multivariata	405
7.8.2	La distribuzione congiunta della media campionaria e della varianza campionaria	408
7.9	Definizione generale di valore atteso	409
	Riassunto	411
	Esercizi	413
	Esercizi teorici	423
	Esercizi di autovalutazione	430
8	TEOREMI LIMITE	435
8.1	Introduzione	435
8.2	La disuguaglianza di Chebyshev e la legge debole dei grandi numeri	435
8.3	Il teorema centrale del limite	438
8.4	La legge forte dei grandi numeri	447
8.5	Ulteriori disuguaglianze	450
8.6	Stime della probabilità di errore quando si approssima la somma di variabili aleatorie bernoulliane indipendenti con una variabile di Poisson	458
	Riassunto	460
	Esercizi	461
	Esercizi teorici	463
	Esercizi di autovalutazione	465
9	ULTERIORI ARGOMENTI DI PROBABILITÀ	467
9.1	Il processo di Poisson	467
9.2	Catene di Markov	470
9.3	Sorpresa, incertezza ed entropia	475
9.4	Teoria dei codici ed entropia	479
	Riassunto	486
	Esercizi ed esercizi teorici	487
	Esercizi di autovalutazione	488
	Bibliografia	489
10	SIMULAZIONE	491
10.1	Introduzione	491
10.2	Tecniche generali per generare variabili aleatorie continue	494
10.2.1	Il metodo della trasformazione inversa	494
10.2.2	Il metodo del rigetto	495
10.3	Simulazione di distribuzioni discrete	500
10.4	Tecniche di riduzione della varianza	503

10.4.1	Utilizzo delle variabili antitetiche	503
10.4.2	Riduzione della varianza grazie al condizionamento	504
10.4.3	Variabili di controllo	506
	Riassunto	506
	Esercizi	507
	Esercizi di autovalutazione	509
	Bibliografia	510
A	RISPOSTE AD ALCUNI ESERCIZI	511
B	SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE	515
	INDICE ANALITICO	571

Presentazione dell'edizione italiana

Il libro di Sheldon Ross *Calcolo delle probabilità* è un'opera completa ed esauriente. Giunto alla nona edizione in lingua inglese, il testo presenta la materia in modo semplice e chiaro; ogni nuovo concetto viene immediatamente applicato a esempi concreti. Sono presenti un grandissimo numero di esercizi ed esercizi teorici, della maggior parte dei quali è riportata la soluzione numerica al termine del testo, e un numero quasi altrettanto grande di esercizi di autovalutazione, di cui è presentata la soluzione in completo dettaglio. L'approccio è certamente meno astratto e teorico della maggior parte dei testi disponibili in lingua italiana, e per questa ragione abbiamo deciso di integrare con poche semplici note il testo originale, per segnalare al lettore più attento come alcuni risultati necessitino di opportune ipotesi per essere ben posti. D'altro canto, una simile quantità di esempi (molti dei quali assolutamente non banali) e applicazioni delle tecniche base della teoria del calcolo delle probabilità è a nostro avviso assente dal panorama editoriale italiano, e in questo senso il testo di Ross certamente trova una sua perfetta collocazione. Pensiamo che sia soprattutto rimarcabile la parte del testo dedicata alle leggi condizionate di variabili aleatorie e al valore atteso condizionato, presentato in maniera chiara e con esempi molto interessanti.

L'utilizzo più naturale del testo di Ross è per un corso introduttivo di Calcolo delle Probabilità (principalmente per le lauree triennali dell'area dell'Ingegneria, di Scienze, di Scienze Statistiche ed Economia), dove non si utilizzi la teoria della misura e si sia interessati a presentare in maniera precisa, accurata e spesso anche coinvolgente questa materia. Ciononostante, questo testo potrà essere di grande aiuto anche per l'utilizzo nei corsi di Calcolo delle Probabilità delle lauree magistrali, nei quali si potranno presentare in maniera più approfondita i vari argomenti.

Ringraziamo Alberto Tonolo e Paolo Vidoni per aver letto con attenzione la traduzione italiana del testo e per i loro commenti al riguardo.

Marco Ferrante e Carlo Mariconda

Prefazione

“La teoria della probabilità è, al fondo, semplice buon senso tradotto in calcolo; ci fa valutare con esattezza ciò che una mente ragionevole sente per una sorta di istinto... È degno di nota che questa scienza, nata a servizio dei giochi d’azzardo, sia diventata il più importante oggetto della conoscenza umana... Le più importanti questioni della vita sono, per la maggior parte, solo dei problemi di probabilità.” Così scriveva due secoli fa il grande matematico e astronomo francese Pierre Simon De Laplace, uno dei fondatori della teoria delle probabilità. Anche se molti possono ritenere esagerato il commento di Laplace, la teoria delle probabilità è diventata uno strumento di importanza fondamentale per quasi tutti gli scienziati, ingegneri, medici, giuristi e operatori aziendali.

Approccio generale e livello matematico

Questo libro presenta in forma chiara e accessibile i concetti fondamentali della teoria delle probabilità. Il testo, che presuppone la conoscenza del calcolo infinitesimale, si rivolge in particolare agli studenti di Ingegneria, Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, Scienze Statistiche ed Economia. Il libro non si limita a presentare l’aspetto matematico della teoria delle probabilità, ma cerca anche di illustrare, attraverso numerosi esempi, le più disparate applicazioni di questa teoria.

Contenuto e organizzazione del corso

Nel Capitolo 1 presentiamo i principi di base dell’analisi combinatoria, uno tra gli strumenti più utili per il calcolo delle probabilità.

Nel Capitolo 2 enunciamo gli assiomi della teoria delle probabilità e mostriamo come essi si possano applicare per calcolare diverse probabilità di interesse.

Il Capitolo 3 tratta l’argomento, estremamente importante, della probabilità condizionata e dell’indipendenza degli eventi. Illustriamo, attraverso una serie di esempi, non solo come le probabilità condizionate intervengano quando è disponibile una informazione parziale, ma anche come esse siano uno strumento che permette di calco-

lare le probabilità più facilmente, senza disporre necessariamente di una informazione parziale. La tecnica di ottenere le probabilità "condizionando" rispetto a un evento riappare nel Capitolo 7, dove la usiamo per calcolare i valori attesi.

Nei Capitoli 4, 5 e 6 introduciamo il concetto di variabile aleatoria. Le variabili aleatorie discrete sono trattate nel Capitolo 4, quelle continue nel Capitolo 5 e le variabili aleatorie congiunte nel Capitolo 6. I concetti fondamentali di valore atteso e di varianza di una variabile aleatoria sono introdotti nei Capitoli 4 e 5; tali valori vengono poi calcolati per molti tipi comuni di variabili aleatorie.

Ulteriori proprietà del valore atteso sono considerate nel Capitolo 7. Molti esempi illustrano l'utilità del fatto che il valore atteso di una somma di variabili aleatorie sia la somma dei loro valori attesi. Le sezioni sul valore atteso condizionato, che comprendono il suo utilizzo nella predizione, e le funzioni generatrici dei momenti, sono contenute in questo capitolo. Inoltre, la sezione finale introduce la distribuzione normale multivariata e presenta una dimostrazione semplice riguardante la distribuzione congiunta della media campionaria e della varianza campionaria da un campione di distribuzioni normali.

Nel Capitolo 8 presentiamo i maggiori risultati teorici del calcolo delle probabilità: la legge forte dei grandi numeri e il teorema centrale del limite. La dimostrazione della legge forte dei grandi numeri presente nel libro è abbastanza semplice, essendo richiesto che le variabili ammettano momento di ordine quattro finito. Quella del teorema centrale del limite utilizza invece il teorema di continuità di Paul Levy, che non viene dimostrato. Inoltre in questo capitolo presentiamo le disuguaglianze di Markov e di Chebyshev e i limiti di Chernoff. L'ultima sezione del capitolo è invece dedicata alla determinazione di un limite dell'errore che si commette approssimando le probabilità relative a una somma di variabili di Bernoulli indipendenti con le corrispondenti probabilità per una variabile di Poisson che abbia il medesimo valore atteso.

Il Capitolo 9 presenta alcuni ulteriori argomenti, come le catene di Markov, il processo di Poisson e una rapida introduzione alla teoria dell'informazione e dei codici.

Nel Capitolo 10 viene infine introdotto il tema della simulazione.

Come nella precedente edizione, alla fine di ogni capitolo sono presenti tre gruppi distinti di esercizi: gli **Esercizi**, gli **Esercizi teorici** e gli **Esercizi di autovalutazione**.

Quest'ultimo gruppo, la cui soluzione completa è riportata nell'Appendice B, è dedicato appositamente agli studenti in vista della loro preparazione per gli esami.

Cambiamenti rispetto alla seconda edizione italiana

Questa nuova edizione raffina ulteriormente la qualità del testo. Oltre ad una moltitudine di piccoli cambiamenti, la nuova edizione propone molti problemi nuovi o rivisitati, esercizi, e materiale scelto sia per l'interesse fine a sé stesso sia per l'uso che se ne può fare al fine di migliorare l'intuizione dello studente sul calcolo delle probabilità. Ad illustrazione di ciò gli Esempi 3h e 4k del Capitolo 3, che trattano della proporzione di gemelli monozigoti o di partite sportive che prevedono una battuta e il palleggio.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare le seguenti persone che hanno trovato cortesemente il tempo di inviarmi dei commenti al fine di migliorare il testo: Amir Ardestani, Polytechnic University of Teheran; Joe Blitzstein, Harvard University; Peter Nuesch, University of Lausanne; Joseph Mitchell, SUNY, Stony Brook; Alan Chambless, attuario; Robert Kriner; Israel David, Ben-Gurion University; T. Lim, George Mason University; Wei Chen, Rutgers; D. Monrad, University of Illinois; W. Rosenberger, George Mason University; E. Ionides, University of Michigan; J. Corvino, Lafayette College; T. Seppalainen, University of Wisconsin; Jack Goldberg, University of Michigan; Sunil Dhar, New Jersey Institute of Technology; Vladislav Kargin, Stanford University; Marlene Miller; Ahmad Parsian; e Fritz Scholz, University of Washington.

Desidero rivolgere un ringraziamento particolare ai colleghi che hanno rivisto questa edizione: Richard Laugesen, University of Illinois; Stacey Hancock, Clark University; Stefan Heinz, University of Wyoming; e Brian Thelen, University of Michigan. Ringrazio anche i correttori di bozze Keith Friedman (University of Texas at Austin) e Stacey Hancock (Clark University), per la loro accuratezza.

Infine, desidero ringraziare i seguenti colleghi per i loro numerosi e utili commenti. I correttori di bozze sono segnalati con un asterisco.

K.B. Athreya, *Iowa State University*
 Richard Bass, *University of Connecticut*
 Robert Bauer, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
 Phillip Beckwith, *Michigan Tech*
 Arthur Benjamin, *Harvey Mudd College*
 Geoffrey Berresford, *Long Island University*
 Baidurya Bhattacharya, *University of Delaware*
 Howard Bird, *St. Cloud State University*
 Shahar Boneh, *Metropolitan State College of Denver*
 Jean Cadet, *State University of New York at Stony Brook*
 Steven Chiappari, *Santa Clara University*
 Nicolas Christou, *University of California, Los Angeles*
 James Clay, *University of Arizona at Tucson*
 Francis Conlan, *University of Santa Clara*
 Justin Corvino, *Lafayette College*
 Jay DeVore, *California Polytechnic University, San Luis Obispo*
 Scott Emerson, *University of Washington*

Thomas R. Fischer, *Texas A & M University*
 Anant Godbole, *Michigan Technical University*
 Zakkula Govindarajulu, *University of Kentucky*
 Richard Groeneveld, *Iowa State University*
 *Stacey Hancock, *Clark University*
 Mike Hardy, *Massachusetts Institute of Technology*
 Bernard Harris, *University of Wisconsin*
 Larry Harris, *University of Kentucky*
 David Heath, *Cornell University*
 *Stefan Heinz, *University of Wyoming*
 Stephen Herschkorn, *Rutgers University*
 Julia L. Higle, *University of Arizona*
 Mark Huber, *Duke University*
 Edward Ionides, *University of Michigan*
 Anastasia Ivanova, *University of North Carolina*
 Hamid Jafarkhani, *University of California, Irvine*
 Chuanshu Ji, *University of North Carolina, Chapel Hill*

Robert Keener, *University of Michigan*
 *Richard Laugesen, *University of Illinois*
 Fred Leysieffer, *Florida State University*
 Thomas Liggett, *University of California, Los Angeles*
 Helmut Mayer, *University of Georgia*
 Bill McCormick, *University of Georgia*
 Ian McKeague, *Florida State University*
 R. Miller, *Stanford University*
 Ditlev Monrad, *University of Illinois*
 Robb J. Muirhead, *University of Michigan*
 Joe Naus, *Rutgers University*
 Nhu Nguyen, *New Mexico State University*
 Ellen O'Brien, *George Mason University*
 N.U. Prabhu, *Cornell University*
 Kathryn Prewitt, *Arizona State University*

Jim Propp, *University of Wisconsin*
 William F. Rosenberger, *George Mason University*
 Myra Samuels, *Purdue University*
 I.R. Savage, *Yale University*
 Art Schwartz, *University of Michigan at Ann Arbor*
 Therese Shelton, *Southwestern University*
 Malcolm Sherman, *State University of New York at Albany*
 Murad Taqqu, *Boston University*
 *Brian Thelen, *University of Michigan*
 Eli Upfal, *Brown University*
 Ed Wheeler, *University of Tennessee*
 Allen Webster, *Bradley University*

S. R.

smross@usc.edu

Analisi combinatoria

1.1 INTRODUZIONE

Quello che segue è un tipico problema pratico che coinvolge le probabilità. Un sistema di comunicazione consiste di n antenne apparentemente identiche che vengono allineate in ordine. Il sistema ottenuto sarà in grado di ricevere tutti i segnali che arrivano – e in tal caso esso sarà detto *funzionante* – se non vi sono due antenne difettose consecutive. Sapendo che esattamente m delle n antenne sono difettose, qual è la probabilità che il sistema sia funzionante? Per esempio, nel caso in cui $n = 4$ e $m = 2$ sono possibili le sei configurazioni del sistema che seguono,

0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

dove 1 indica che l'antenna funziona e 0 che è difettosa. Dato che il sistema risulta funzionante nei primi tre casi e non funzionante negli ultimi tre, appare sensato attribuire il valore $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ alla probabilità richiesta. Nel caso di n e m arbitrari, potremmo calcolare in modo simile la probabilità che il sistema sia funzionante. Potremmo cioè contare il numero di configurazioni nelle quali il sistema è funzionante e poi dividere per il numero di tutte le configurazioni possibili.

Da quanto precede vediamo che sarebbe utile possedere un metodo per contare il numero di modi in cui avvengono certi fenomeni. Di fatto, molti problemi del calcolo delle probabilità si risolvono semplicemente calcolando il numero di modi in cui avviene un dato evento; sarà questo l'argomento dell'*analisi combinatoria*.

1.2 IL PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO

Il principio che segue sarà spesso utilizzato in seguito. In parole povere, esso afferma che se un esperimento ha m esiti possibili e se un altro esperimento ha n esiti possibili, allora i due esperimenti hanno mn esiti possibili.

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio

Si realizzino due esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n esiti possibili. Allora, se sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producono esiti finali distinti¹, i due esperimenti hanno in tutto mn esiti possibili.

Dimostrazione del principio fondamentale: possiamo elencare tutti gli esiti dei due esperimenti come segue:

$$\begin{array}{l} (1, 1), (1, 2), \dots, (1, n) \\ (2, 1), (2, 2), \dots, (2, n) \\ \vdots \\ (m, 1), (m, 2), \dots, (m, n) \end{array}$$

dove diciamo che l'esito finale è (i, j) se il primo esperimento ha prodotto l'esito i e il secondo esperimento ha prodotto l'esito j . L'insieme degli esiti possibile consiste quindi di m righe, ognuna delle quali contiene n elementi.

Esempio 2a. Una piccola comunità consiste di 10 donne, ognuna delle quali ha 3 bambini. Si vuole eleggere una di queste mamme e un suo bambino come mamma e bimbo dell'anno; quante sono le scelte possibili?

Soluzione Si può vedere la scelta della mamma come l'esito del primo esperimento e la scelta successiva di uno dei suoi bambini come l'esito del secondo esperimento; per il principio fondamentale vi sono $10 \times 3 = 30$ scelte possibili. ■

Il principio fondamentale si generalizza facilmente nel caso di più esperimenti.

Il principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio

Si realizzino r esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili, che per ognuno degli esiti dei due primi esperimenti il terzo esperimento abbia n_3 esiti possibili ecc. Allora, se sequenze distinte di esiti degli r esperimenti producono esiti finali distinti allora gli r esperimenti hanno in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ esiti possibili.

¹ La precisazione che gli esiti siano distinti non appare nella versione originale del testo. Essa è tuttavia fondamentale e la sua mancata verifica è la maggior causa di errori in combinatoria: si voglia ad esempio costituire un comitato di due persone, da un gruppo costituito da un uomo U e due donne A, B . Vi sono chiaramente solo 3 modi per formare il comitato: $\{U, A\}, \{U, B\}, \{A, B\}$. La realizzazione del comitato si può evidentemente fare realizzando due esperimenti consecutivi: si sceglie prima una donna (2 scelte) e poi il secondo membro (2 scelte, chiunque sia la donna scelta prima); l'applicazione cieca del principio precedente, senza la precisazione a esso apportata, condurrebbe quindi erroneamente a 4 modi possibili per formare il comitato! Il principio non si può qui applicare in quanto la scelta di A nel primo esperimento e di B nel secondo conduce allo stesso risultato $\{A, B\}$ ottenuto scegliendo B nel primo esperimento e A nel secondo; è quindi violata la richiesta che sequenze distinte di esiti degli esperimenti parziali producano esiti finali distinti [N.d.T].

Esempio 2b. Un comitato universitario è composto da 3 studenti, 4 ricercatori, 5 professori e 2 amministrativi. In quanti modi si può formare un sottocomitato di quattro persone nel quale vi sia un rappresentante di ognuna delle categorie elencate sopra?

Soluzione Si può vedere la scelta del sottocomitato come il risultato di quattro esperimenti che consistono nella scelta di un singolo rappresentante per ogni categoria. Segue dalla versione generalizzata del principio fondamentale che vi sono $3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$ sottocomitati possibili. ■

Esempio 2c. Quante sono le targhe formate da 7 caratteri, sapendo che i primi 3 sono delle lettere (scelte tra le 26 dell'alfabeto anglosassone) e gli ultimi 4 dei numeri?

Soluzione Per la versione generalizzata del principio fondamentale vi sono $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$ targhe possibili. ■

Esempio 2d. Quante sono le funzioni definite su un insieme di n elementi che assumono solo i valori 0 o 1?

Soluzione Indichiamo gli elementi dell'insieme con $1, 2, \dots, n$. Dato che $f(i)$ è uguale a 0 o 1, vi sono 2^n funzioni siffatte. ■

Esempio 2e. Nell'Esempio 2c, quante targhe vi sarebbero escludendo le ripetizioni tra lettere o numeri?

Soluzione Vi sarebbero $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$ targhe. ■

1.3 PERMUTAZIONI

In quanti modi si possono ordinare le lettere a, b, c ? Elencando tutti i casi possibili $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ si vede che ve ne sono sei. Ciascuno di questi ordinamenti prende il nome di *permutazione*. Vi sono pertanto sei permutazioni di un insieme di tre oggetti. Si poteva anche dedurre questo risultato dal principio fondamentale, dato che il primo oggetto della permutazione è uno dei tre, il secondo è uno dei due rimanenti e il terzo è l'ultimo che rimane. Vi sono pertanto $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutazioni possibili.

Supponiamo ora di disporre di n oggetti. Con un ragionamento simile a quello appena svolto si vede che vi sono

$$n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

permutazioni di n oggetti.

Esempio 3a. In quanti modi si possono disporre 9 persone in fila indiana?

Soluzione Vi sono $9! = 362\,880$ modi per disporre 9 persone in fila indiana. ■

Esempio 3b. Un corso di probabilità è frequentato da 10 studenti: 6 uomini e 4 donne.

Alla fine dell'esame viene stilata una graduatoria dal voto più alto a quello più basso. Sapendo che tutti gli studenti hanno ottenuto dei punteggi diversi fra loro, dire

- (a) quante sono le possibili classifiche?
 (b) quante sono le possibili classifiche se gli uomini e le donne compaiono in liste separate?

Soluzione (a) A ogni classifica corrisponde una permutazione dei nomi delle 10 persone, la risposta è pertanto $10! = 3\,628\,800$.

(b) Vi sono $6!$ classifiche degli uomini e $4!$ classifiche delle donne; per il principio fondamentale vi sono pertanto $(6!)(4!) = (720)(24) = 17\,280$ classifiche dei 10 studenti. ■

Esempio 3c. Il Sig. Amadori deve sistemare 10 libri in un ripiano della scaffalatura. Quattro libri sono di matematica, tre sono di chimica, due sono di storia e uno è di grammatica. Amadori, che è un tipo ordinato, vuole fare in modo che i libri sullo stesso argomento siano vicini in libreria. In quanti modi ciò si può realizzare?

Soluzione Vi sono $4! 3! 2! 1!$ possibilità di sistemare i libri in modo tale che, nell'ordine, vi siano prima i testi di matematica, poi quelli di chimica, poi quelli di storia e infine la grammatica. Analogamente, qualunque sia l'ordine degli argomenti, vi sono $4! 3! 2! 1!$ possibilità di sistemare i libri in quell'ordine. Dato che vi sono $4!$ modi per ordinare gli argomenti, vi sono in tutto $4! 4! 3! 2! 1! = 6912$ modi per sistemare i libri come voluto. ■

Determineremo ora il numero di permutazioni di un insieme di n oggetti, alcuni dei quali sono indistinguibili fra loro. L'esempio che segue è particolarmente istruttivo.

Esempio 3d. Quanti sono gli anagrammi di $P E P P E R$?

Soluzione Se le lettere da permutare fossero distinte e la parola fosse $P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$ vi sarebbero $6!$ permutazioni possibili. Tuttavia le lettere non sono distinte: consideriamo per esempio una delle precedenti permutazioni – per esempio $P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$. Se permutiamo i P fra di loro e le E fra di loro, la parola è ancora del tipo $P P E P E R$. In altri termini, tutte le $3! 2!$ permutazioni

$$\begin{array}{ll} P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R & P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R \\ P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R & P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R \\ P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R & P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R \\ P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R & P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R \\ P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R & P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R \\ P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R & P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R \end{array}$$

sono del tipo $P P E P E R$. Di conseguenza vi sono $6!/(3! 2!) = 60$ anagrammi possibili delle lettere $P E P P E R$. ■

Un ragionamento analogo a quello svolto nell'Esempio 3d prova che vi sono

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

permutazioni distinte di n oggetti, dei quali n_1 sono identici fra loro, n_2 sono identici fra loro e distinti dai precedenti, ..., n_r sono identici fra loro e distinti dai precedenti.

Esempio 3e. In un torneo di scacchi vi sono 10 concorrenti: 4 russi, 3 statunitensi, 2 inglesi e 1 brasiliano. Se la classifica finale indica soltanto nell'ordine la nazionalità dei giocatori, quanti sono gli esiti possibili?

Soluzione Vi sono

$$\frac{10!}{4! 3! 2! 1!} = 12\,600$$

esiti possibili. ■

Esempio 3f. Quanti segnali distinti formati da 9 bandiere appese in fila si possono realizzare con 4 bandiere bianche, 3 bandiere rosse e 2 bandiere blu se le bandiere dello stesso colore sono indistinguibili?

Soluzione Vi sono

$$\frac{9!}{4! 3! 2!} = 1260$$

segnali distinti. ■

1.4 COMBINAZIONI

Si vuole determinare il numero di insiemi che si possono formare con r oggetti a partire da un insieme di n oggetti. Per esempio, quanti insiemi di 3 lettere si possono formare con le 5 lettere A, B, C, D e E ? Per rispondere si può ragionare come segue: la prima lettera può essere scelta in 5 modi, la seconda può essere scelta in 4 modi e la terza può essere scelta in 3 modi; vi sono quindi $5 \cdot 4 \cdot 3$ modi per scegliere l'insieme delle 3 lettere tenendo conto dell'ordine. Tuttavia ogni insieme di 3 lettere, per esempio A, B e C , viene in tal modo contato 6 volte (quante sono le permutazioni $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$) e pertanto il numero totale di insiemi di 3 lettere che si possono formare è

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

In generale, dato che $n(n-1) \cdots (n-r+1)$ rappresenta il numero di scelte di r oggetti tra n , tenendo conto dell'ordine nel quale questi vengono selezionati, e dato che ogni insieme di r oggetti viene in tal modo contato $r!$ volte, si ha che il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare da un insieme di n oggetti è

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Notazione e terminologia

Definiamo $\binom{n}{r}$, per $r \leq n$, come

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Diremo che $\binom{n}{r}$ rappresenta il numero di combinazioni² di r oggetti tra n .

Pertanto $\binom{n}{r}$ è il numero di sottoinsiemi di r oggetti che si possono formare con un insieme di n oggetti, senza tener conto dell'ordine della selezione³.

Esempio 4a. Si vuole formare un comitato di 3 persone scelte tra 20 persone. Quanti sono i comitati possibili?

Soluzione Vi sono $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ comitati possibili. ■

Esempio 4b. Quanti comitati composti da 2 donne e 3 uomini si possono formare da un gruppo di 5 donne e 7 uomini? Quanti sono i comitati se 2 uomini che hanno litigato rifiutano di sedere insieme nel comitato?

Soluzione Ci sono $\binom{5}{2}$ possibili insiemi con 2 donne, e $\binom{7}{3}$ possibili insiemi di 3 uomini; segue allora dal principio fondamentale che vi sono $\binom{5}{2}\binom{7}{3}$
 $= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350$ comitati possibili formati da 2 donne e 3 uomini.

Se 2 uomini rifiutano di sedere insieme nel comitato, allora, essendoci $\binom{2}{0}\binom{5}{3}$ insiemi di 3 uomini che non contengono nessuno dei due litiganti e $\binom{2}{1}\binom{5}{2}$ insiemi di 3 uomini che contengono esattamente uno solo dei litiganti, vi sono $\binom{2}{0}\binom{5}{3} + \binom{2}{1}\binom{5}{2} = 30$ gruppi di 3 uomini che non contengono

²Per convenzione si definisce $0! = 1$. Pertanto $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Si pone inoltre $\binom{n}{i}$ uguale a 0 se $i < 0$ o se $i > n$.

³Il lettore presti attenzione al fatto che nel linguaggio comune il termine combinazione corrisponde ad un codice formato da una sequenza ordinata di simboli; in combinatoria invece la combinazione è un insieme di simboli nel quale l'ordine degli stessi non interviene. [N.d.T]

entrambi i due litiganti. Essendoci poi $\binom{5}{2}$ modi per scegliere le 2 donne, i comitati possibili sono $30\binom{5}{2} = 300$. ■

Esempio 4c. Si considerano n antenne, m delle quali sono difettose e le altre $n - m$ sono funzionanti. Supponendo che tutte le antenne difettose e quelle funzionanti siano indistinguibili fra loro, in quanti modi esse possono essere allineate senza che due antenne difettose siano consecutive?

Soluzione Immaginiamo innanzitutto di allineare le $n - m$ antenne funzionanti. Ora, dato che due antenne difettose non possono essere consecutive, gli spazi tra due antenne funzionanti possono contenere al più una antenna difettosa. Dobbiamo quindi selezionare, dagli $n - m + 1$ spazi (rappresentati in Figura 1.1 da \wedge) tra le $n - m$ antenne funzionanti, m spazi nei quali sistemare le antenne difettose. Vi sono quindi $\binom{n - m + 1}{m}$ allineamenti possibili nei quali c'è almeno un'antenna funzionante tra due antenne difettose. ■

È spesso utile la seguente identità combinatoria

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n \quad (4.1)$$

L'uguaglianza (4.1) si può provare analiticamente o tramite il ragionamento combinatorio che segue. Consideriamo un insieme di n oggetti e fissiamo l'attenzione su uno di essi – chiamiamolo oggetto 1. Ora, vi sono $\binom{n-1}{r-1}$ sottoinsiemi di r elementi che contengono l'oggetto 1 (dato che ogni tale insieme è formato scegliendo $r - 1$ oggetti tra i rimanenti $n - 1$ oggetti). Vi sono inoltre $\binom{n-1}{r}$ sottoinsiemi di r elementi che non contengono l'oggetto 1. La (4.1) segue allora dal fatto che i sottoinsiemi di r elementi sono in tutto $\binom{n}{r}$.

I numeri $\binom{n}{r}$ sono noti anche come *coefficienti binomiali*, dato che essi intervengono nello sviluppo del binomio.

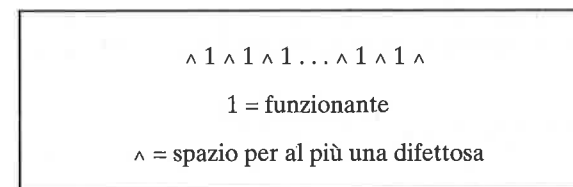


Figura 1.1

Il teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (4.2)$$

Presentiamo due dimostrazioni del teorema del binomio; la prima si basa sull'induzione, la seconda su un argomento combinatorio.

Dimostrazione per induzione del teorema del binomio: se $n = 1$, l'uguaglianza (4.2) si riduce

$$x + y = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = y + x$$

Si supponga che la Formula (4.2) valga per $n - 1$. Si ha

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= (x + y)(x + y)^{n-1} \\ &= (x + y) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

Posto $i = k + 1$ nel primo membro e $i = k$ nel secondo membro dell'ultima somma, si ottiene

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i y^{n-i} \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right] x^i y^{n-i} + y^n \\ &= x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} + y^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue da (4.1). L'asserto è quindi dimostrato.

Dimostrazione combinatoria del teorema del binomio: consideriamo il prodotto

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \cdots (x_n + y_n)$$

Sviluppando si ottiene la somma di 2^n termini, ciascuno dei quali è il prodotto di n fattori. Inoltre, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, ciascuno dei 2^n termini contiene come fattore x_i o y_i . Per esempio

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2$$

Ora, quanti dei 2^n termini della somma suddetta hanno come fattori k termini del tipo x_i e $(n - k)$ termini del tipo y_i ? Dato che ogni termine costituito da k degli x_i e $(n - k)$ degli y_i è individuato dalla scelta di un sottoinsieme di k elementi tra gli n elementi x_1, x_2, \dots, x_n , vi sono $\binom{n}{k}$ termini siffatti. Pertanto, posto $x_i = x$, $y_i = y$,

$i = 1, \dots, n$, si ha che

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Esempio 4d. Sviluppare $(x + y)^3$.

Soluzione

$$\begin{aligned} (x + y)^3 &= \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y + \binom{3}{3} x^3 y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \end{aligned}$$

Esempio 4e. Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi?

Soluzione Dato che vi sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi con k elementi, la risposta è

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$$

Tale risultato si poteva ottenere assegnando a ogni elemento dell'insieme il valore 0 o il valore 1. A ogni assegnazione corrisponde l'unico sottoinsieme i cui elementi sono quelli con il valore uguale a 1. Si conclude allora dato che vi sono 2^n assegnazioni possibili.

Si noti che abbiamo incluso anche il sottoinsieme vuoto che ha 0 elementi e quindi il numero di sottoinsiemi non vuoti è $2^n - 1$.

1.5 COEFFICIENTI MULTINOMIALI

In questa sezione esaminiamo il tipo di problemi che segue: si devono distribuire n oggetti distinti in r scatole distinte, in modo tale che ciascuna di esse contenga, nell'ordine n_1, n_2, \dots, n_r oggetti, dove $\sum_{i=1}^r n_i = n$. In quanti modi si può effettuare questa

suddivisione? Vi sono $\binom{n}{n_1}$ possibili scelte per gli oggetti della prima scatola; per ogni tale scelta vi sono $\binom{n - n_1}{n_2}$ possibili scelte per gli oggetti della seconda scatola; per

ogni scelta effettuata nelle prime due scatole vi sono $\binom{n - n_1 - n_2}{n_3}$ scelte possibili per gli oggetti della terza scatola; e così via. Segue allora dal principio fondamentale della combinatoria che vi sono

$$\begin{aligned} & \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{r-1}}{n_r} \\ &= \frac{n!}{(n-n_1)! n_1! (n-n_1-n_2)! n_2! \dots 0! n_r!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!} \end{aligned}$$

suddivisioni possibili.

Vediamo ora che il numero trovato sopra coincide con il numero di permutazioni della sequenza $1, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, r, \dots, r$, nella quale i appare n_i volte, per $i = 1, \dots, r$. Infatti consideriamo gli n valori $1, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, r, \dots, r$, dove i appare n_i volte, per $i = 1, \dots, r$. Ad ogni permutazione di questi valori corrisponde una suddivisione degli stessi in r gruppi G_1, \dots, G_r formati come segue: ad ogni sequenza i_1, \dots, i_n formata con gli n elementi attribuiamo l'elemento 1 al gruppo G_1 , l'elemento 2 al gruppo G_2 , e così via. Ad esempio, se $n = 8$ e $n_1 = 4, n_2 = 3$ e $n_3 = 1$, allora alla permutazione $1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1$ corrisponde la suddivisione nella quale gli elementi $1, 2, 6, 8$ appartengono al gruppo G_1 , gli elementi $3, 5, 7$ al gruppo G_2 e 4 al gruppo G_3 . La conclusione segue dal fatto che ogni permutazione di lunghezza n di $\{1, 2, \dots, r\}$ con n_1 ripetizioni di 1, n_2 ripetizioni di 2, ..., n_r ripetizioni di r genera in tal modo una suddivisione di $\{1, \dots, n\}$ in r gruppi distinti di taglia rispettiva n_1, \dots, n_r e che, viceversa, ogni suddivisione di questo tipo proviene da una permutazione della sequenza $1, 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, r, \dots, r$, nella quale i appare n_i volte, per $i = 1, \dots, r$.

Notazione

Se $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, si definisce $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ come

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$

Pertanto $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ rappresenta il numero di suddivisioni di n oggetti distinti in r gruppi distinti con, rispettivamente, n_1, n_2, \dots, n_r elementi.

Esempio 5a. Una stazione di polizia di una piccola città consiste di 10 poliziotti. Se 5 di essi devono pattugliare le strade, 2 di essi devono restare nella stazione e gli altri 3 devono stare in riserva, in quanti modi si possono assegnare i 3 compiti ai 10 poliziotti?

Soluzione Vi sono $\frac{10!}{5! 2! 3!} = 2520$ modi possibili di assegnare i compiti. ■

Esempio 5b. Dieci ragazzi devono formare due squadre A e B di 5 membri ciascuna. Le squadre giocheranno in campionati distinti. Quante sono le suddivisioni possibili?

Soluzione Sono possibili $\frac{10!}{5! 5!} = 252$ suddivisioni. ■

Esempio 5c. Dieci ragazzi devono formare due squadre di 5 membri ciascuna. In quanti modi possono farlo?

Soluzione Si noti che questo esempio è diverso dal precedente in quanto qui l'ordine delle due squadre è irrilevante: non ci sono delle squadre distinte A e B ma solo una suddivisione in 2 gruppi di 5 persone ciascuno. La risposta pertanto è

$$\frac{10!/(5! 5!)}{2!} = 126 \quad \blacksquare$$

La dimostrazione della seguente generalizzazione del teorema del binomio è lasciata per esercizio.

Il teorema multinomiale

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \dots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$$

La somma al secondo membro è cioè estesa ai vettori di interi non negativi (n_1, n_2, \dots, n_r) tali che $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

I numeri $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$ si chiamano *coefficienti multinomiali*.

Esempio 5d. Nel primo round di un torneo ad eliminazione che coinvolge $n = 2^m$ giocatori, gli n giocatori sono suddivisi in $n/2$ coppie, ognuna delle quali gioca una partita. I perdenti sono eliminati e i vincitori partecipano al round successivo, finché non resta che un solo giocatore. Si supponga che nel torneo vi siano 8 giocatori iniziali.

- Quanti sono gli esiti possibili del primo round? (Ad esempio, un esito è che il giocatore 1 vinca contro 2, 3 vinca contro 4, 5 contro 6 e 7 contro 8.)
- Quanti sono gli esiti possibili del torneo, se per esito intendiamo una informazione completa su tutti i round?

Soluzione Per contare gli esiti possibili del primo round è sufficiente contare il numero di possibili coppie ordinate che si possono formare con 8 persone (ad esempio si può decidere che in ogni tale coppia il primo numero indica il giocatore che vince sul secondo). A tal fine si osservi che il numero di suddivisioni di 8 giocatori in una *prima* coppia, una *seconda* coppia, una *terza* coppia e una

quarta coppia non ordinate è $\binom{8}{2, 2, 2, 2} = \frac{8!}{2^4}$. Pertanto, il numero di possibi-

li suddivisioni degli 8 giocatori in 4 coppie non ordinate è $\frac{8!}{2^4 4!}$. Ora, per ognu-

na delle 4 coppie non ordinate così formate, si hanno 2 possibili scelte del vincitore della partita: vi sono quindi $\frac{8!2^4}{2^44!} = \frac{8!}{4!}$ esiti possibili per il primo round. [Un modo alternativo per fare il conto poteva essere quello di osservare che vi sono $\binom{8}{4}$ scelte dei 4 vincitori e, per ognuna di queste scelte, vi sono 4!

modi per appaiare i 4 vincitori con 4 perdenti, riottenendo così $4!\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!}$ esiti possibili per il primo round.]

Analogamente, per ognuno degli esiti del primo round, vi sono $\frac{4!}{2!}$ esiti possibili per il secondo round, e per ognuno degli esiti dei primi due round, vi sono $\frac{2!}{1!}$ esiti possibili per il terzo round. Pertanto, per il principio fonda-

mentale del calcolo combinatorio, il torneo ha $\frac{8!}{4!} \frac{4!}{2!} \frac{2!}{1!} = 8!$ esiti possibili. Lo stesso argomento può essere utilizzato per mostrare che in realtà un torneo con $n = 2^m$ giocatori ha $n!$ esiti possibili.

Alla luce del risultato precedente, non è difficile rifare il conto con un ragionamento diretto, mostrando che vi è una corrispondenza biunivoca tra gli esiti del torneo e l'insieme delle permutazioni di $1, \dots, n$. A tal fine, elenchiamo i giocatori come segue, a seconda dell'esito del torneo: assegniamo il posto 1 al vincitore del torneo, il posto 2 al perdente dell'ultimo round. Ai due giocatori che hanno perso il penultimo round, assegniamo il posto 3 al giocatore che ha perso con il giocatore al posto 1, il posto 4 al giocatore che ha perso con il giocatore al posto 2. Ai quattro giocatori che hanno perso nel second'ultimo round, assegniamo il posto 5 al giocatore che ha perso con quello al posto 1, il posto 6 a quello che ha perso contro il giocatore al posto 2, posto 7 a quello che ha perso contro il giocatore al posto 3, e posto 8 a quello che ha perso contro il giocatore al posto 4. Procedendo in tal modo si giunge ad assegnare un posto in graduatoria ad ognuno dei giocatori. (Una descrizione più rapida della procedura consiste nell'assegnare il posto 1 al vincitore del torneo, e ad assegnare al giocatore che ha perso in un round che prevedeva 2^k partite il posto 2^k più il posto del giocatore che lo ha battuto, per $k = 0, \dots, m - 1$.) In tal modo gli esiti del torneo sono rappresentati da una permutazione i_1, \dots, i_n di $1, \dots, n$ nella quale i_j è il giocatore al quale è stato assegnato il posto j . Dato che tornei distinti producono permutazioni distinte e che, viceversa, ad ogni permutazione corrisponde l'esito di un torneo, segue che vi sono tanti esiti del torneo quante sono le permutazioni di $1, \dots, n$. ■

Esempio 5e.

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \binom{2}{2,0,0} x_1^2 x_2^0 x_3^0 + \binom{2}{0,2,0} x_1^0 x_2^2 x_3^0 + \binom{2}{0,0,2} x_1^0 x_2^0 x_3^2 + \binom{2}{1,1,0} x_1^1 x_2^1 x_3^0$$

$$+ \binom{2}{1,0,1} x_1^1 x_2^0 x_3^1 + \binom{2}{0,1,1} x_1^0 x_2^1 x_3^1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \quad \blacksquare$$

***1.6 IL NUMERO DI SOLUZIONI INTERE DI UNA EQUAZIONE**

Vi sono r^n possibili modi per distribuire n palline distinguibili in r urne distinguibili. Infatti ogni pallina può essere messa in una delle r possibili urne. Supponiamo invece ora che le palline siano indistinguibili. Quanti sono ora gli esiti dell'esperimento? Dato che le palline sono indistinguibili, l'esito dell'esperimento costituito dalla distribuzione delle n palline in r urne può essere descritto da un vettore (x_1, x_2, \dots, x_r) , dove x_i è il numero di palline contenute nella i -esima urna. Il problema equivale quindi a quello di determinare il numero di vettori di interi non negativi (x_1, x_2, \dots, x_r) tali che

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

Per calcolarlo, cominciamo considerando dapprima il numero di soluzioni intere positive. A tal fine, immaginiamo di allineare gli n oggetti indistinguibili e di suddividerli in modo da formare r gruppi non vuoti. È sufficiente per questo selezionare $r - 1$ degli $n - 1$ spazi tra gli oggetti adiacenti come punti di divisione (si veda la Figura 1.2).

Per esempio, se $n = 8$ e $r = 3$ e si scelgono due divisori come segue

$$ooo|ooo|oo$$

allora il vettore ottenuto ha come componenti $x_1 = 3, x_2 = 3, x_3 = 2$. Dato che vi sono $\binom{n-1}{r-1}$ selezioni possibili, vale la seguente proposizione.

Proposizione 6.1

Vi sono $\binom{n-1}{r-1}$ vettori distinti di interi positivi (x_1, x_2, \dots, x_r) tali che

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad x_i > 0, i = 1, \dots, r$$

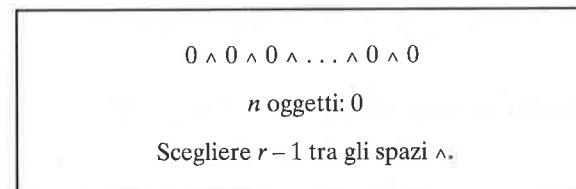


Figura 1.2

* Ricordiamo che gli asterischi indicano le parti che possono essere omesse in prima lettura.

Per ottenere ora il numero di soluzioni non negative (al posto di quelle positive), è sufficiente osservare che il numero di soluzioni non negative di $x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$ è uguale al numero di soluzioni positive di $y_1 + \dots + y_r = n + r$ (come si vede ponendo $y_i = x_i + 1, i = 1, \dots, r$). Il risultato segue quindi dalla Proposizione 6.1.

Proposizione 6.2

Vi sono $\binom{n+r-1}{r-1}$ vettori distinti di interi non negativi (x_1, x_2, \dots, x_r) tali che

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n \quad (6.1)$$

Esempio 6a. Quante sono le soluzioni intere non negative dell'equazione $x_1 + x_2 = 3$?

Soluzione Il numero di tali soluzioni è $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$: le coppie $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 0)$. ■

Esempio 6b. Un investitore dispone di 20 000 euro e decide di distribuirli tra 4 possibili investimenti (ogni investimento consiste di un numero intero di migliaia di euro). Quante sono le strategie possibili utilizzando l'intera somma a disposizione? Quante sono invece le strategie investendo una parte a scelta della somma?

Soluzione Se indichiamo con $x_i, i = 1, 2, 3, 4$, il numero di migliaia di euro investiti nell'investimento i , allora, nel caso in cui si investa tutta la somma, x_1, x_2, x_3, x_4 sono degli interi che soddisfano

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad x_i \geq 0$$

Pertanto, dalla Proposizione 6.2, vi sono $\binom{23}{3} = 1771$ strategie di investimento possibili. Se invece si investe solo una parte della somma, indicando con x_5 la somma da trattenere, una strategia è un vettore intero $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ che soddisfa

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

Segue dalla Proposizione 6.2 che vi sono $\binom{24}{4} = 10\,626$ strategie possibili. ■

Esempio 6c. Quanti sono i termini nello sviluppo di $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$?

Soluzione

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}$$

dove la somma al secondo membro è estesa ai vettori interi non negativi (n_1, \dots, n_r) tali che $n_1 + \dots + n_r = n$. Pertanto, dalla Proposizione 6.2, vi sono $\binom{n+r-1}{r-1}$ termini. ■

Esempio 6d. Riconsideriamo l'Esempio 4c, dove abbiamo considerato un insieme di n antenne, delle quali m sono (indistinguibili e) difettose, mentre le rimanenti $n - m$ sono (anch'esse indistinguibili e) funzionanti. Dobbiamo determinare il numero di allineamenti delle antenne nei quali due antenne difettose non siano adiacenti. A tal fine immaginiamo di allineare le antenne difettose e di posizionare poi le antenne funzionanti. Indichiamo con x_1 il numero di antenne funzionanti a sinistra della prima antenna difettosa, con x_2 il numero di antenne funzionanti tra le due prime antenne difettose, e così via. Schematicamente abbiamo una situazione del tipo

$$x_1 \ 0 \ x_2 \ 0 \ \dots \ x_m \ 0 \ x_{m+1}$$

Ora, ci sarà almeno una antenna funzionante tra due difettose non appena $x_i > 0, i = 2, \dots, m$. Di conseguenza il numero di configurazioni che soddisfano la richiesta è il numero di vettori (x_1, \dots, x_{m+1}) che soddisfano

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i > 0, i = 2, \dots, m$$

Ma posto $y_1 = x_1 + 1, y_i = x_i, i = 2, \dots, m, y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, si vede che ciò è uguale al numero di vettori positivi (y_1, \dots, y_{m+1}) che soddisfano

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{m+1} = n - m + 2$$

Si deduce dalla Proposizione 6.1 che vi sono $\binom{n-m+1}{m}$ esiti possibili; ciò è in accordo con quanto si è trovato nell'Esempio 4c.

Supponiamo ora di interessarci al numero di esiti nei quali ogni paio di antenne difettose sia separato da almeno due antenne funzionanti. Ragionando come sopra, si tratta del numero di vettori che soddisfano

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = n - m \quad x_1 \geq 0, x_{m+1} \geq 0, x_i \geq 2, i = 2, \dots, m$$

Posto $y_1 = x_1 + 1, y_i = x_i - 1, i = 2, \dots, m, y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, si vede che si tratta del numero di soluzioni positive di

$$y_1 + \dots + y_{m+1} = n - 2m + 3$$

Per la Proposizione 6.1 vi sono $\binom{n-2m+2}{m}$ esiti possibili. ■

RIASSUNTO

Il principio fondamentale del calcolo combinatorio afferma che un esperimento effettuato in due fasi nel quale vi sono n esiti possibili nella prima fase, e per ognuno di que-

sti vi sono m esiti possibili nella seconda fase allora, se sequenze distinte dei due esperimenti producono esiti finali distinti, l'esperimento ha nm esiti possibili.

Vi sono $n! = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutazioni di n oggetti. Si definisce poi $0!$ uguale a 1.

Il numero definito da

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)! i!}$$

per $0 \leq i \leq n$ e 0 altrimenti rappresenta il numero di sottoinsiemi con i elementi di un insieme di n elementi. Esso appare nello sviluppo del teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

e viene spesso per questo chiamato *coefficiente binomiale*.

Se n_1, \dots, n_r sono interi non negativi la cui somma è uguale a n

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

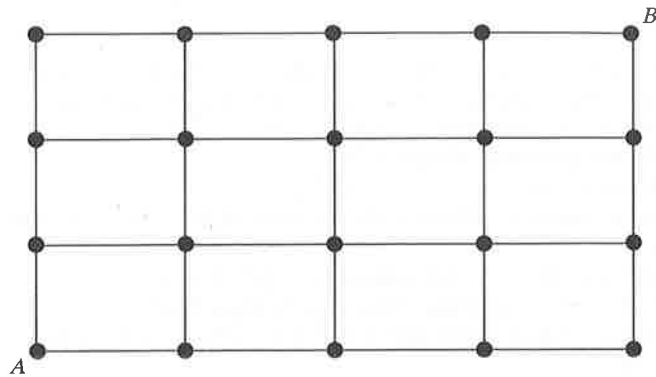
è il numero di suddivisioni di n oggetti distinti in r gruppi disgiunti di, rispettivamente, n_1, n_2, \dots, n_r elementi.

ESERCIZI

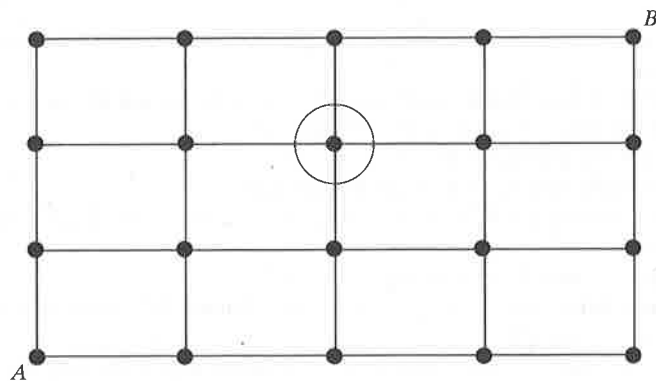
- (a) Quante sono le targhe possibili formate da 7 simboli, sapendo che le prime due sono delle lettere (alfabeto di 26 lettere) e le altre cinque dei numeri?
(b) Rispondere ad (a) supponendo che le lettere e i numeri non si ripetano.
- Quanti sono gli esiti possibili in 4 lanci consecutivi di un dado (diciamo per esempio che l'esito è 3,4,3,1 se il primo lancio dà 3, il secondo 4, il terzo 3 e il quarto 1)
- A venti lavoratori vengono assegnati 20 diversi lavori. Quante sono le assegnazioni possibili?
- Alberto, Bruno, Carlo e Marco hanno formato un quartetto, con quattro diversi strumenti. Se ognuno di loro può suonare tutti e quattro gli strumenti, quante sono i modi possibili per formare il quartetto? Rispondere alla stessa domanda sapendo che Alberto e Bruno possono suonare tutti gli strumenti ma Carlo e Marco sanno suonare solo il pianoforte e il violino.
- Anni fa il prefisso telefonico nel Canada e negli Stati Uniti consisteva in una sequenza di 3 cifre: la prima era un intero compreso tra 2 e 9, la seconda era 0 o 1, la terza era un intero tra 1 e 9. Quanti prefissi erano possibili? Quanti di essi cominciavano con il 4?
- In quanti modi si possono distribuire 4 libri diversi a 7 bambini?
- Nella prima fila di un'aula devono sedersi 6 studenti: tre ragazzi e tre ragazze.
(a) In quanti modi si possono sedere gli studenti?
(b) In quanti modi si possono sedere se sia i maschi che le femmine devono sedere vicini fra loro?
(c) In quanti modi si possono sedere se solo i maschi devono stare vicini?
(d) In quanti modi si possono sedere se due studenti dello stesso sesso non devono stare vicini?
- Quanti sono gli anagrammi di
(a) RUOTA;
(b) PAPRIKA;

- (c) MISSISSIPPI;
(d) PICCOLO?
- Il gioco di un bimbo consiste di 12 pezzi di legno colorati dei quali 6 sono neri, 4 sono rossi, 1 è bianco e 1 è blu. In quanti modi il bimbo può allineare i pezzi?
- In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se
(a) non ci sono restrizioni di nessun tipo;
(b) A e B siedono vicini;
(c) ci sono 4 uomini e 4 donne e due persone dello stesso sesso non possono sedersi vicine;
(d) ci sono 5 uomini, e questi devono sedere vicini fra loro;
(e) ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?
- In quanti modi si possono sistemare in una libreria 3 romanzi, 2 testi di matematica e uno di chimica se
(a) i libri si possono sistemare in qualunque modo;
(b) i testi di matematica vanno messi vicini fra loro e i romanzi vanno messi vicini fra loro?
(c) i romanzi vanno messi vicini fra loro e gli altri libri si possono sistemare in qualunque ordine?
- Si devono selezionare cinque studenti di una classe di 30 studenti per assegnare dei premi distinti. In quanti modi si possono selezionare gli studenti se
(a) uno studente può ricevere più premi;
(b) uno studente può ricevere al più un premio?
- Si consideri un gruppo di 20 persone. Quante sono le strette di mano se ciascuno dà la mano a tutti gli altri?
- Quante sono le mani di cinque carte da poker?
- Una classe di tango argentino ha 22 studenti, 10 donne e 12 uomini. In quanti modi si possono formare 5 coppie?
- Uno studente vuole vendere 2 libri da una collezione di 6 testi di matematica, 7 di scienze e 4 di economia. Quante sono le scelte possibili se:
(a) i 2 libri devono riguardare lo stesso argomento;
(b) i 2 libri devono riguardare soggetti diversi?
- Si vogliono distribuire 7 diversi regali a 10 bambini. Quante sono le distribuzioni possibili se nessun bimbo può ricevere più di un regalo?
- Si deve formare una commissione parlamentare di 7 persone, composta da 2 Popolari, 2 Socialisti e 3 Indipendenti scelti tra 5 Popolari, 6 Socialisti e 4 Indipendenti. Quante commissioni possibili si possono formare?
- Si deve formare un comitato di 3 uomini e 3 donne scelti da un gruppo di 8 donne e 6 uomini. Quanti comitati sono possibili se:
(a) 2 degli uomini rifiutano di sedere assieme;
(b) 2 delle donne rifiutano di sedere assieme;
(c) un uomo e una donna rifiutano di sedere assieme?
- Una persona ha 8 amici e decide di invitarne 5 a cena.
(a) In quanti modi può farlo se 2 amici non vanno d'accordo fra loro e non vogliono trovarsi insieme?
(b) In quanti modi può farlo se tra gli 8 amici c'è una coppia che non può essere divisa?
- Si consideri la griglia disegnata a pagina seguente. Si supponga di partire dal punto A spostandosi di volta in volta di un passo a destra o in alto, fino ad arrivare al punto B. Quanti sono i percorsi possibili?

SUGGERIMENTO: Si osservi che per raggiungere B da A si devono fare 4 passi a destra e 3 passi verso l'alto.



22. Nel problema 21, quanti sono i percorsi possibili che passano dal punto cerchiato?



- 23. Un laboratorio di psicologia che conduce degli esperimenti sui sogni dispone di 3 stanze con 2 letti ciascuna. In quanti modi si possono assegnare i letti a 3 coppie di gemelli in modo tale che ogni coppia di gemelli dorma nella stessa stanza?
- 24. Sviluppare $(3x^2 + y)^5$.
- 25. Nel gioco del bridge ci sono 4 giocatori, a ciascuno dei quali sono distribuite 13 carte. Quante sono le possibili distribuzioni?
- 26. Sviluppare $(x_1 + 2x_2 + 3x_3)^4$.
- 27. In quanti modi si possono suddividere 12 persone in comitati di rispettivamente 3, 4 e 5 persone?
- 28. In quanti modi si possono assegnare 8 nuovi maestri a 4 scuole? Rispondere alla stessa domanda se ogni scuola deve ricevere 2 maestri.
- 29. In una competizione sportiva ci sono 10 concorrenti per il sollevamento pesi: 3 italiani, 4 russi, 2 francesi e un tedesco. Se la graduatoria finale tiene conto soltanto della nazionalità degli sportivi e non della loro identità, quanti sono gli esiti possibili della gara? In quanti di questi esiti l'Italia ha un concorrente tra i primi 3 e 2 tra gli ultimi tre?
- 30. I delegati di 10 paesi, tra i quali la Francia, l'Italia, la Gran Bretagna e gli U.S.A., devono sedersi in fila. In quanti modi lo possono fare se si vuole che i delegati italiano e inglese siedano vicini e che i delegati francese e statunitense non siedano accanto?
- *31. Un lotto di 8 lavagne identiche è assegnato a 4 scuole diverse; in quanti modi ciò può essere fatto? E se ogni scuola deve ricevere almeno una lavagna?
- *32. È Carnevale, 8 persone si travestono allo stesso modo da sembrare uguali. Esse si recano a una festa in un edificio a 6 piani, ma non ricordano a che piano scendere, così a ogni piano qualcuno decide se scendere o meno. In quanti modi ciò può avvenire? Stessa

domanda se nel gruppo 5 persone sono ugualmente travestite da Zorro e 3 ugualmente travestite da fate.

- *33. Si dispone di un capitale di 20 000 euro e di 4 possibili investimenti. Ogni investimento deve consistere in un numero intero di migliaia di euro, i 4 investimenti richiedono inoltre un investimento minimo rispettivamente di 2, 2, 3 e 4 mila euro. Quante sono le strategie possibili se
 - (a) si deve investire in ognuno delle 4 opportunità;
 - (b) si deve investire in almeno 3 delle 4 opportunità?
- *34. Si supponga che vengano pescati 10 pesci da un lago che ne contiene 5 diverse specie.
 - (a) Quanti sono gli esiti possibili della pesca se per esito si intende il numero di pesci pescati per ognuna delle specie presenti?
 - (b) Quanti sono gli esiti possibili se 3 dei 10 pesci pescati sono delle trote?
 - (c) Quanti sono gli esiti possibili se almeno 2 dei 10 pesci pescati sono delle trote?

ESERCIZI TEORICI

- 1. Provare la versione generalizzata del principio fondamentale del calcolo combinatorio.
- 2. Si effettuano due esperimenti. Il primo ha m possibili esiti. Se il primo esperimento produce l'esito i , il secondo può avere n_i possibili esiti, $i = 1, \dots, m$. Supponendo che sequenze distinte di esiti dei due esperimenti producano esiti finali distinti, quanti sono gli esiti finali possibili?
- 3. In quanti modi si possono scegliere r oggetti in un insieme di n oggetti, tenendo conto dell'ordine delle scelte?
- 4. Vi sono $\binom{n}{r}$ modi per allineare n palline delle quali r sono identicamente nere e $n - r$ sono identicamente bianche: darne una spiegazione.
- 5. Determinare il numero di vettori (x_1, \dots, x_n) nei quali x_i è uguale a 0 o a 1 e

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq k$$

- 6. Quanti sono i vettori (x_1, \dots, x_k) nei quali ogni x_i è un intero positivo tale che $1 \leq x_i \leq n$ e $x_1 < x_2 < \dots < x_k$?
- 7. Dare una dimostrazione analitica della Formula (4.1).
- 8. Provare che

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

SUGGERIMENTO: Considerare n palline nere e m palline bianche distinguibili solo dal colore. In quanti modi si può formare un sacchetto di r palline?

- 9. Utilizzare il risultato dell'Esercizio teorico 8 per provare che

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

- 10. Si vuole formare, da un gruppo di n persone, un comitato di k persone ($k \leq n$), una delle quali sarà nominata presidente.
 - (a) Mostrare, effettuando prima la scelta del comitato e poi quella del presidente, che vi

sono $\binom{n}{k} k$ scelte possibili.

- (b) Mostrare, effettuando prima la scelta del comitato senza presidente e poi quella del Presidente, che vi sono $\binom{n}{k-1}(n-k+1)$ scelte possibili.
- (c) Mostrare, effettuando prima la scelta del presidente e poi quella degli altri membri del comitato, che vi sono $n\binom{n-1}{k-1}$ scelte possibili.
- (d) Concludere dai punti precedenti che si ha

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

- (e) Provare analiticamente l'identità del punto (d).
11. L'identità combinatoria di Fermat afferma che

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^n \binom{i-1}{k-1} \quad n \geq k$$

Provare l'identità con un argomento combinatorio (non serve fare conti).

SUGGERIMENTO: Considerare l'insieme dei numeri interi da 1 a n . Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi nei quali i è il massimo fra loro?

12. Si consideri la seguente identità combinatoria:

$$\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

- (a) Dimostrare l'identità precedente attraverso un argomento combinatorio considerando un insieme di n persone e determinando, in due modi, il numero di scelte possibili per un comitato con un numero qualunque di persone e di un presidente del comitato.

SUGGERIMENTO: (i) Quante sono le scelte possibili per un comitato di k persone e per il suo presidente?

(ii) Quante sono le scelte possibili per un presidente e per gli altri membri del comitato?

- (b) Verificare la seguente uguaglianza per $n = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} n(n+1)$$

Per dare una dimostrazione combinatoria della formula precedente, si consideri un insieme di n persone, e si mostri che entrambi i membri dell'uguaglianza rappresentano il numero di scelte possibili di un comitato, del suo presidente, e del suo segretario (che può anche essere il presidente stesso).

SUGGERIMENTO: (i) Quante sono le scelte possibili in un comitato che contiene esattamente k persone?

(ii) Quante sono le scelte possibili dei comitati nei quali il presidente e il segretario sono diversi?

(RISPOSTA: $n2^{n-1}$.)

- (iii) Quante sono le scelte possibili dei comitati nei quali il presidente e il segretario sono diversi?

- (c) Provare ora che

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^3 = 2^{n-3} n^2 (n+3)$$

13. Provare che, per $n > 0$,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

SUGGERIMENTO: Utilizzare il teorema del binomio.

14. Si deve formare, a partire da un gruppo di n persone, un comitato di j persone e da questo formare un sottocomitato di i persone, $i \leq j$.

- (a) Dedurre una identità combinatoria calcolando in due modi il numero di scelte possibili per il comitato e per il sottocomitato – prima supponendo di scegliere prima il comitato e dopo il sottocomitato, poi supponendo di scegliere prima il sottocomitato e in seguito gli altri membri del comitato.
- (b) Utilizzare il punto (a) per provare la seguente identità combinatoria:

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} = \binom{n}{i} 2^{n-i} \quad i \leq n$$

- (c) Utilizzare il punto (a) e l'Esercizio teorico 13 per provare che

$$\sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i} (-1)^{n-j} = 0 \quad i \leq n$$

15. Sia $H_k(n)$ il numero di vettori (x_1, \dots, x_k) nei quali gli x_i sono degli interi positivi che soddisfano $1 \leq x_i \leq n$ e $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$.

- (a) Mostrare, senza fare conti, che

$$H_1(n) = n$$

$$H_k(n) = \sum_{j=1}^n H_{k-1}(j) \quad k > 1$$

SUGGERIMENTO: Quanti sono i vettori nei quali $x_k = j$?

- (b) Utilizzare la formula ricorsiva provata sopra per calcolare $H_3(5)$.

SUGGERIMENTO: Calcolare innanzitutto $H_2(n)$ per $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

16. Si consideri una gara con n concorrenti nella quale l'esito è una classifica dei concorrenti dove è ammessa la parità. In altri termini, l'esito consiste in una partizione dei giocatori in vari gruppi, il primo dei quali è formato dai giocatori che hanno il primo posto, il successivo dei quali è formato dai giocatori che hanno il secondo posto e così via. Sia $N(n)$ il numero di possibili esiti. Per esempio, $N(2) = 3$ dato che in una gara con 2 concorrenti vi sono 3 possibilità: il giocatore 1 è (il solo) primo, il giocatore 2 è (il solo) primo, i due giocatori pareggiano.

- (a) Determinare la lista dei possibili esiti nel caso $n = 3$.
- (b) Definendo $N(0)$ uguale a 1, provare senza fare calcoli che

$$N(n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} N(n-i)$$

SUGGERIMENTO: Quanti sono gli esiti nei quali i giocatori sono in lizza per l'ultimo posto?

(c) Provare che la formula del punto (b) equivale alla:

$$N(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} N(i)$$

(d) Usare la formula di ricorrenza per determinare $N(3)$ e $N(4)$.

17. Dare una dimostrazione combinatoria della formula $\binom{n}{r} = \binom{n}{r, n-r}$.

18. Provare che

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_r} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_r} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_r-1}$$

SUGGERIMENTO: Utilizzare un argomento simile a quello usato per provare l'Equazione (4.1).

19. Provare il teorema multinomiale.

*20. In quanti modi si possono distribuire n palline identiche in r urne distinte in modo tale che la i -esima urna contenga almeno m_i palline, per ogni $i = 1, \dots, r$? Supporre che

$$n \geq \sum_{i=1}^r m_i.$$

*21. Provare che vi sono esattamente $\binom{r}{k} \binom{n-1}{n-r+k}$ soluzioni intere di

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

nelle quali esattamente k degli x_i sono uguali a 0.

*22. Si consideri una funzione $f(x_1, \dots, x_n)$ di n variabili, derivabile infinite volte rispetto a ogni variabile. Quante derivate parziali di ordine r si possono formare?

*23. Determinare il numero di vettori (x_1, \dots, x_n) tali che ogni x_i è un intero non negativo e

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k$$

ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

1. Quante sono le permutazioni delle lettere A, B, C, D, E, F nelle quali

- (a) A e B sono vicine;
- (b) A precede B;
- (c) A precede B e B precede C;
- (d) A precede B e C precede D;
- (e) A è vicino a B e C è vicino a D;
- (f) E non è l'ultima lettera?

2. In quanti modi 4 italiani, 3 francesi e 3 inglesi possono sedersi in fila, sapendo che le persone della stessa nazionalità devono stare vicine?

3. Un presidente, un tesoriere e un segretario, tutti distinti, devono essere scelti tra i 10

membri di un circolo. Quante sono le scelte possibili se

- (a) non ci sono restrizioni;
- (b) A e B non vogliono lavorare insieme;
- (c) C e D vogliono lavorare insieme o non lavorare entrambi;
- (d) E deve essere uno dei tre prescelti;
- (e) F accetta solo se fa il presidente?

4. Una studentessa deve rispondere a 7 domande su 10 per superare l'esame. Quante sono le scelte delle domande possibili? Stessa domanda se essa deve rispondere ad almeno 3 delle prime 5 domande.

5. In quanti modi si possono distribuire 7 regali tra 3 bimbi se il più giovane deve riceverne 3 e gli altri 2?

6. Quante sono le targhe di 7 lettere formate da 3 lettere (dell'alfabeto inglese di 26 lettere) e 4 numeri? (si ammettono le ripetizioni e non ci sono vincoli sulla disposizione di numeri lettere.)

7. Dare una spiegazione combinatoria della identità

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

8. Quanti sono i numeri di n cifre scelte tra 0, 1, 2, ..., 9 tali che

- (a) non vi siano due cifre consecutive uguali;
- (b) lo 0 appare esattamente i volte, $i = 0, \dots, n$?

9. Consideriamo 3 classi composte ciascuna da n studenti. Si scelgono 3 studenti da questo gruppo di $3n$ studenti.

- (a) Quante sono le scelte possibili dei 3 studenti?
- (b) In quanti casi i 3 studenti appartengono alla stessa classe?
- (c) In quanti casi soltanto due dei tre studenti appartengono alla stessa classe?
- (d) In quanti casi tutti gli studenti appartengono a classi diverse?
- (e) Dedurre una identità combinatoria dai punti precedenti.

10. Quanti numeri di 5 cifre si possono formare con gli interi 1, 2, ..., 9 se nessuna cifra può apparire più di due volte? (Così, per esempio, 41434 non è ammesso.)

11. Un torneo di tennis ha $2n$ concorrenti. Al primo round si formano n coppie di giocatori e ogni coppia gioca. Quanti sono i possibili esiti del primo round se i risultati specificano le coppie che hanno giocato e i relativi vincitori?

12. Si deve scegliere un comitato di 6 persone da un gruppo di 7 uomini e 8 donne. Quanti sono i comitati con almeno 3 donne e 2 uomini?

*13. All'asta vengono battuti 4 Dalì, 5 Van Gogh e 6 Picasso. Sono presenti 5 collezionisti d'arte. Un giornalista trascrive soltanto il numero di Dalì, Van Gogh e Picasso acquistati dai singoli collezionisti. Quante sono le trascrizioni possibili dei dati sapendo che tutti i quadri vengono venduti?

*14. Determinare il numero di vettori (x_1, \dots, x_n) a componenti intere positive tali che

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq k$$

dove $k \geq n$.

15. Un gruppo di n studenti partecipa a un corso di ripasso nella sede estiva dell'Università. Nella bacheca vengono affissi i nomi di chi ha superato l'esame, in ordine decrescente di punteggio. Per esempio se nel foglio appaiono i nomi "Rossi, Vianello" vuol dire che solo Rossi e Vianello hanno passato l'esame e che Rossi ha ottenuto un punteggio più alto. Quanti sono i risultati possibili supponendo che non vi siano mai dei punteggi uguali?

16. Quanti sottoinsiemi di 4 elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, 20\}$ contengono almeno un numero tra 1, 2, 3, 4, 5?

17. Dimostrare analiticamente che si ha

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Darne poi una interpretazione combinatoria.

18. In una piccola comunità 3 famiglie sono costituite da un solo genitore e da un figlio unico, 5 famiglie sono formate da 2 genitori con un figlio unico, 7 famiglie sono formate da 2 genitori con 2 figli e 6 famiglie sono composte da 2 genitori e 3 figli. In quanti modi si possono scegliere un genitore e un figlio della stessa famiglia?

19. In quanti modi si può formare una targa di 8 caratteri costituita da 5 lettere e 3 numeri senza che vi siano ripetizioni di numeri o lettere? E con i numeri in posizione consecutiva? Si suppone che non vi siano regole (oltre a quelle date) sulla posizione di numeri e lettere.

20. Verificare la validità dell'uguaglianza

$$\sum_{x_1 + \dots + x_r = n, x_i \geq 0} \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_r!} = r^n$$

per $n = 3$ e $r = 2$. Provare poi che l'uguaglianza è valida per ogni n e r interi non nulli. (La somma è fatta su tutte le r -uple di numeri interi la cui somma è uguale a n .)

SUGGERIMENTO: in quanti modi si può formare una sequenza di n caratteri con i simboli $\{1, \dots, r\}$? In quante di esse compare il simbolo i un numero x_i di volte, $i = 1, \dots, r$?

Assiomi della probabilità

2.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo introduciamo il concetto di probabilità di un evento e quindi mostriamo come le probabilità possano essere calcolate in certe situazioni. Preliminarmente avremo però bisogno di definire i concetti di spazio campionario e di evento di un esperimento.

2.2 SPAZIO CAMPIONARIO ED EVENTI

Consideriamo un esperimento il cui risultato non possa essere previsto con certezza. Sebbene l'esito dell'esperimento non sia a priori noto, supponiamo che l'insieme di tutti i possibili esiti lo sia. Definiamo questo insieme lo *spazio campionario* dell'esperimento e lo denotiamo con S . Vediamo alcuni esempi.

1. Se l'esito di un esperimento consiste nel determinare il sesso di un neonato, allora

$$S = \{f, m\}$$

dove l'esito f indicherà che il neonato è femmina e m che è maschio.

2. Se l'esito di un esperimento è l'ordine di arrivo in una corsa di sette cavalli, distinguibili per le posizioni di partenza individuate dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, allora

$$S = \{\text{tutte le } 7! \text{ permutazioni di } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$$

Il singolo esito $(2, 3, 1, 6, 5, 4, 7)$ significa, per esempio, che il cavallo numero 2 è giunto primo, il numero 3 secondo, poi si è classificato il numero 1, e così via.

3. Se l'esperimento consiste nel lanciare successivamente due monete, allora lo spazio campionario è formato dai seguenti 4 punti:

$$S = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$$

L'esito sarà (T, T) se entrambe le monete hanno dato testa, (T, C) se la prima moneta ha dato testa e la seconda croce, (C, T) se la prima moneta ha dato croce e la seconda testa e (C, C) se entrambe hanno dato croce.

4. Se l'esperimento consiste nel lancio di due dadi, allora lo spazio campionario consiste di 36 elementi

$$S = \{(i, j): i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

dove l'esito (i, j) indica che il numero i compare nel dado più a sinistra e j nell'altro dado.

5. Se l'esperimento consiste nel misurare (in ore) il tempo di vita di un transistor, allora lo spazio campionario consiste nell'insieme dei numeri reali non negativi

$$S = \{x: 0 \leq x < \infty\}$$

Ogni sottoinsieme E dello spazio campionario viene definito *evento*. Cioè, un evento è un insieme formato da possibili esiti di un esperimento. Se l'esito di un esperimento è contenuto in E , allora affermiamo che E si è verificato. Alcuni esempi di eventi sono i seguenti.

Nel precedente Esempio 1, se $E = \{f\}$, allora E è l'evento che il neonato sia femmina. In maniera analoga, $F = \{m\}$ rappresenta l'evento che il neonato sia maschio.

Nell'Esempio 2, se

$$E = \{\text{tutti gli esiti di } S \text{ che iniziano con il numero } 3\}$$

allora E è l'evento che il cavallo numero 3 vinca la corsa.

Nell'Esempio 3, se $E = \{(T, T), (T, C)\}$, allora E è l'evento che si ottenga testa con la prima moneta.

Nell'Esempio 4, se $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, allora E rappresenta l'evento che la somma dei due dadi sia 7.

Nell'Esempio 5, se $E = \{x: 0 \leq x \leq 5\}$, allora E è l'evento che il transistor non funzioni più di 5 ore.

Dati due eventi E e F dello spazio campionario S , definiamo il nuovo evento $E \cup F$ formato da tutti gli esiti che stanno in E o in F o in entrambi. Questo significa che l'evento $E \cup F$ si verifica se almeno uno tra E e F si verifica. Così, nell'Esempio 1 se $E = \{f\}$ è l'evento "il neonato è una femmina" e $F = \{m\}$ è l'evento "il neonato è un maschio", allora

$$E \cup F = \{f, m\}$$

Quindi $E \cup F$ sarà l'intero spazio campionario S . Nell'Esempio 3, se $E = \{(T, T), (T, C)\}$ e $F = \{(C, T)\}$, allora

$$E \cup F = \{(T, T), (T, C), (C, T)\}$$

In questo caso $E \cup F$ si verificherà se in almeno una delle due monete otterremo testa.

L'evento $E \cup F$ è detto *unione* degli eventi E ed F .

In maniera simile, dati due eventi E e F possiamo definire il nuovo evento EF , detto *intersezione* di E e F , il quale consiste di tutti gli esiti che sono contenuti sia in E che in F . Ciò significa che l'evento EF (talvolta scritto nel testo con la notazione più classica $E \cap F$) si verificherà solo se entrambi E e F si verificheranno. Per esempio, nel precedente Esempio 3 se $E = \{(T, T), (T, C), (C, T)\}$ è l'evento che ho ottenuto almeno una volta testa e $F = \{(T, C), (C, T), (C, C)\}$ è l'evento che ho ottenuto almeno una volta croce, allora

$$EF = \{(T, C), (C, T)\}$$

è l'evento che si sia ottenuto esattamente una volta testa e una volta croce. Nell'Esempio 4, se $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ è l'evento che la somma dei dadi sia 7 e $F = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ è l'evento che la somma dei dadi sia 6, allora l'evento EF non contiene alcun esito e quindi non potrà mai verificarsi. Per dare a quest'evento un nome, lo definiremo come l'evento impossibile e lo denoteremo con \emptyset (l'insieme vuoto). Se $EF = \emptyset$, allora E e F sono detti *incompatibili*.

La definizione di unione e intersezione di eventi può essere estesa a più di due eventi in maniera immediata. Se E_1, E_2, \dots sono eventi, l'unione di questi eventi, che denoteremo con $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, è definita come l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in almeno un evento E_n , con $n = 1, 2, \dots$. In maniera analoga, l'intersezione degli eventi E_n , che denoteremo con $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, è definita come l'evento formato da tutti gli esiti che sono compresi in tutti gli eventi E_n , con $n = 1, 2, \dots$.

Da ultimo, per ogni evento E definiamo il nuovo evento E^c , detto *complementare* di E , che consiste di tutti gli esiti dello spazio campionario che non stanno in E . Cioè, E^c si verifica se e solo se E non si è verificato. Nell'Esempio 4, se $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, allora E^c si verifica quando la somma dei due dadi sia diversa da 7. Si noti che $S^c = \emptyset$.

Dati due eventi E e F , se tutti gli esiti di E sono anche in F , allora diciamo che E è contenuto in F e scriviamo $E \subset F$ (o in maniera equivalente $F \supset E$). Perciò se $E \subset F$, il fatto che E si sia verificato implica che necessariamente anche F si è verificato. Se $E \subset F$ e $F \subset E$, diciamo che E e F coincidono e scriviamo $E = F$.

Una rappresentazione grafica che risulta molto utile per illustrare le relazioni logiche tra gli eventi sono i diagrammi di Venn. Lo spazio campionario S è rappresentato come un rettangolo e gli eventi E, F, G, \dots sono rappresentati come sottoinsiemi contenuti nel rettangolo. Gli eventi di interesse possono essere indicati ombreggiando opportune regioni del diagramma.

Per esempio, nei tre diagrammi di Venn mostrati in Figura 2.1, le aree ombreggiate rappresentano, rispettivamente, gli eventi $E \cup F$, EF , e E^c . Il diagramma di Venn della Figura 2.2 indica che $E \subset F$.

Le operazioni di unione, intersezione e passaggio al complementare degli eventi verificano alcune regole non dissimili da quelle dell'algebra. Ne elenchiamo alcune.

$$\text{Proprietà commutative} \quad E \cup F = F \cup E \quad EF = FE$$

$$\text{Proprietà associative} \quad (E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad (EF)G = E(FG)$$

$$\text{Proprietà distributive} \quad (E \cup F)G = EG \cup FG \quad EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$$

Queste relazioni si verificano provando che ogni esito contenuto nell'evento a sinistra dell'uguaglianza è contenuto nell'evento a destra e viceversa. Un modo alternativo per provarle è utilizzando i diagrammi di Venn. Per esempio, la proprietà distributiva può essere verificata dalla sequenza dei diagrammi di Venn della Figura 2.3.

Le seguenti utili relazioni che intercorrono tra le tre operazioni base dell'unione, intersezione e passaggio al complementare, sono note come *leggi di De Morgan*:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

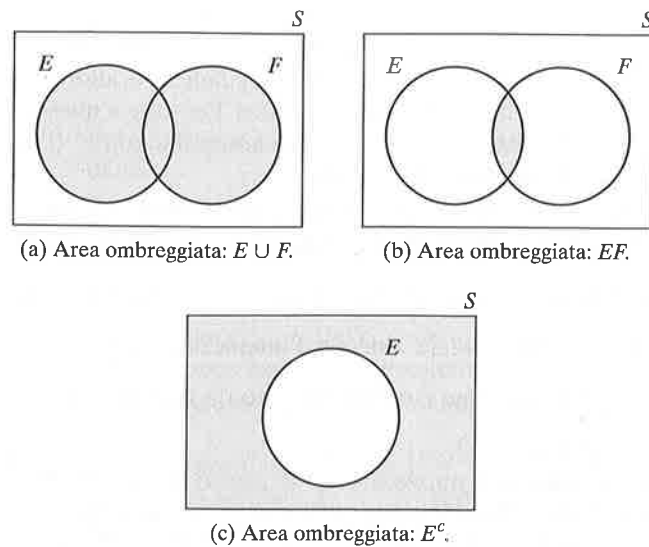


Figura 2.1

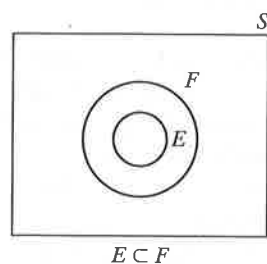


Figura 2.2

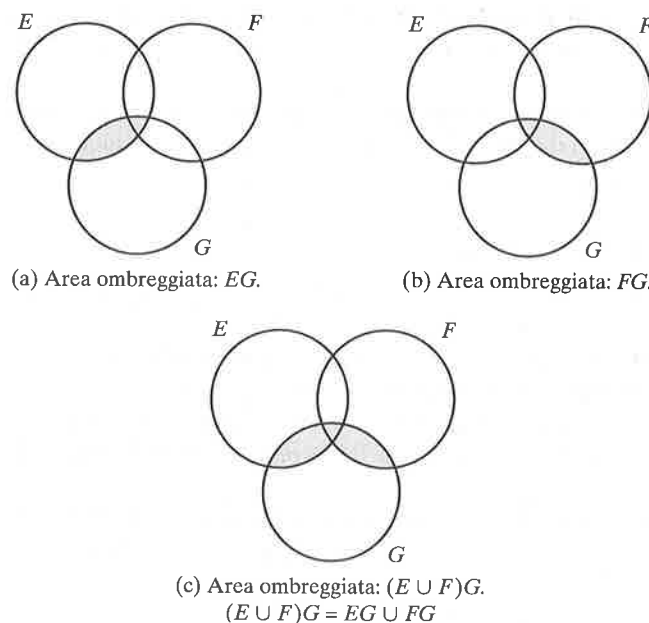


Figura 2.3

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$

Per provare le leggi di De Morgan, supponiamo dapprima che x sia un esito contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$. Allora x non è contenuto in $\bigcup_{i=1}^n E_i$, il che significa che x non è contenuto in ognuno degli eventi $E_i, i = 1, 2, \dots, n$. A sua volta questo implica che x è contenuto in E_i^c per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ e quindi che è contenuto in $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$. Per dimostrare l'altra inclusione, supponiamo che x sia un esito contenuto in $\bigcap_{i=1}^n E_i^c$. Allora x appartiene a E_i^c , per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, il che equivale a dire che non appartiene a E_i per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Questo implica che x non è contenuto in $\bigcup_{i=1}^n E_i$, il che porta ad affermare che è contenuto in $\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c$. Questo prova la prima legge di De Morgan.

Per provare la seconda legge di De Morgan, usiamo da principio la prima legge per ottenere

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^n (E_i^c)^c$$

che, essendo $(E^c)^c = E$, è equivalente a

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i$$

Passando al complementare otteniamo il risultato

$$\bigcup_{i=1}^n E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c$$

2.3 ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

La probabilità di un evento può essere definita in termini della frequenza relativa. Una definizione di questo tipo segue di solito il seguente schema: supponiamo che un esperimento, il cui spazio campionario è S , venga ripetuto varie volte sotto le medesime condizioni. Per ogni evento E dello spazio campionario S , definiamo $n(E)$ il numero delle volte che si è verificato E nelle prime n ripetizioni dell'esperimento. Allora $P(E)$, la probabilità dell'evento E , è definita come

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n}$$

Cioè, $P(E)$ è definito come la proporzione (al limite) del numero di volte che E si verifica. È quindi la frequenza limite di E .

Sebbene la precedente definizione sia intuitiva e possa essere facilmente ricordata dal lettore, essa presenta un serio inconveniente: come possiamo sapere se $n(E)/n$ con-

verge al limite a una costante, che sia la stessa per ogni possibile successione di ripetizioni dell'esperimento? Per esempio, supponiamo che l'esperimento consista nel lancio di una moneta. Come possiamo sapere che la proporzione di teste ottenute nei primi n lanci converga a un qualche valore quando n diventa grande? Inoltre, anche sapendo che questa converga, come possiamo sapere che ripetendo un'altra volta la serie di esperimenti, otterremo ancora lo stesso limite nella proporzione di teste?

Coloro i quali propongono questa definizione di probabilità usualmente rispondono a queste obiezioni affermando che la convergenza di $n(E)/n$ a un valore costante è un'ipotesi, o un *assioma*, del sistema. Tuttavia, assumere che $n(E)/n$ converga a un valore costante appare un'ipotesi abbastanza complessa.

Benché si possa sperare che tale limite esista, non appare a priori evidente che ciò debba essere vero. In realtà, non sarebbe più ragionevole assumere un insieme di assiomi più semplici e intuitivi per definire la probabilità e poi cercare di provare che il limite delle frequenze relative esiste? Questo ultimo è il moderno approccio assiomatico al calcolo delle probabilità che adopereremo in questo testo. In particolare, assumeremo che per ogni evento E nello spazio campionario S , esista un valore $P(E)$, detto probabilità di E . Dovremo quindi assumere che le probabilità soddisfino un certo insieme di assiomi, che sia in accordo con la nostra (e speriamo anche del lettore) nozione intuitiva di probabilità.

Consideriamo un esperimento il cui spazio campionario sia S . Per ogni evento E dello spazio S supponiamo che sia definito un numero $P(E)$, il quale soddisfi i seguenti tre assiomi.

Assioma 1

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

Assioma 2

$$P(S) = 1$$

Assioma 3

Per ogni successione di eventi a due a due disgiunti E_1, E_2, \dots (cioè, eventi per i quali $E_i E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Definiamo $P(E)$ la probabilità dell'evento E .

L'Assioma 1 afferma che la probabilità che l'esito di un esperimento sia uno degli esiti contenuti in E , è un numero compreso tra 0 e 1. L'Assioma 2 stabilisce invece che con probabilità uguale a 1, l'esito sarà un elemento dello spazio campionario S . L'Assio-

ma 3, infine, dice che per ogni successione di eventi a due a due disgiunti, la probabilità che almeno uno si verifichi è esattamente la somma delle loro rispettive probabilità.

Se consideriamo una successione di eventi E_1, E_2, \dots , dove $E_1 = S$, $E_i = \emptyset$ per $i > 1$, allora, essendo gli eventi a due a due disgiunti ed essendo $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, dall'Assioma 3 ricaviamo

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset)$$

il che implica

$$P(\emptyset) = 0$$

Perciò l'evento impossibile ha probabilità 0 di verificarsi.

Dalle precedenti proprietà discende anche che presi n eventi E_1, E_2, \dots, E_n , a due a due disgiunti,

$$P\left(\bigcup_1^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \tag{3.1}$$

Questa proprietà deriva dall'Assioma 3 una volta che si sia estesa la precedente successione di eventi ponendo E_i uguale all'evento impossibile per i maggiore di n . L'Assioma 3 è equivalente alla Formula (3.1) quando lo spazio campionario è finito (perché?). Tuttavia, la maggiore generalità dell'Assioma 3 risulta necessaria quando lo spazio campionario contenga infiniti esiti.

Esempio 3a. Se il nostro esperimento consiste nel lanciare una moneta e supponiamo che testa appaia con la medesima probabilità di croce, allora definiremo

$$P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$$

In caso contrario, se la moneta non è equilibrata e abbiamo la sensazione che ottenere testa sia due volte più probabile che ottenere croce, dovremo porre

$$P(\{T\}) = \frac{2}{3} \quad P(\{C\}) = \frac{1}{3}$$

Esempio 3b. Se lanciamo un dado e supponiamo che tutte e sei le facce siano equiprobabili, allora dovremo porre $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$. Grazie all'Assioma 3 seguirà che la probabilità che in un lancio del dado si ottenga un numero pari vale

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$

L'ipotesi che esista una funzione di insieme P , definita sugli eventi di uno spazio campionario S e che soddisfi gli Assiomi 1, 2, e 3, rappresenta il moderno approccio matematico al calcolo delle probabilità. Crediamo che il lettore sia d'accordo con noi che i tre assiomi precedenti siano naturali e in accordo con il concetto intuitivo di probabilità che ognuno di noi ha. Inoltre, utilizzando questi assiomi saremo capaci di provare che se

un esperimento viene ripetuto infinite volte, allora, con probabilità uguale a 1, la proporzione di volte che ogni evento E si sarà verificato sarà uguale a $P(E)$. Questo risultato, noto come la legge dei grandi numeri, verrà presentato nel Capitolo 8. In aggiunta, presenteremo nella Sezione 2.7 un'ulteriore possibile interpretazione della probabilità vista come una misura della fiducia che un certo evento si verifichi.

OSSERVAZIONE TECNICA: abbiamo supposto che $P(E)$ sia definita per ogni evento E dello spazio campionario. In realtà, quando lo spazio campionario è un insieme infinito più che numerabile, $P(E)$ è definita solo per una sottoclasse di eventi detti insiemi misurabili. Questa restrizione però non ci riguarderà, giacché tutti gli eventi di interesse pratico sono effettivamente sottoinsiemi misurabili.¹

2.4 ALCUNE SEMPLICI PROPRIETÀ

In questo paragrafo proveremo alcune semplici proprietà delle probabilità. Per prima cosa notiamo che essendo E e E^c sempre disgiunti e valendo $E \cup E^c = S$, abbiamo che grazie agli Assiomi 2 e 3

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

Questa proprietà è chiaramente equivalente all'enunciato dato nella seguente Proposizione 4.1

Proposizione 4.1

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

A parole, la Proposizione 4.1 stabilisce che la probabilità che un evento non si verifichi è pari a 1 meno la probabilità che si verifichi. Per esempio, se la probabilità di ottenere testa lanciando una moneta è pari a $\frac{3}{8}$, allora la probabilità di ottenere croce dovrà essere $\frac{5}{8}$.

La nostra seconda proprietà stabilisce che se un evento E è contenuto in un altro evento F , allora la probabilità di E non può essere maggiore della probabilità di F .

Proposizione 4.2

Se $E \subset F$, allora $P(E) \leq P(F)$.

Dimostrazione: essendo $E \subset F$, abbiamo che F può essere espresso come

$$F = E \cup E^c F$$

Quindi, essendo E e $E^c F$ disgiunti, otteniamo dall'Assioma 3 che

$$P(F) = P(E) + P(E^c F)$$

che implica la proprietà desiderata, già che $P(E^c F) \geq 0$. ■

¹ Si può dimostrare, ad esempio, che non esiste una funzione P su tutti i sottoinsiemi di $[0, 1]$ tale che $P([a, b]) = b - a$ per ogni $0 \leq a \leq b \leq 1$ e che soddisfi ai tre assiomi [N.d.T.].

La Proposizione 4.2 ci dice, per esempio, che lanciando un dado la probabilità che si ottenga 1 è minore della probabilità che si ottenga un numero dispari.

La successiva proposizione stabilisce la relazione tra la probabilità dell'unione di due eventi e le probabilità dei singoli eventi.

Proposizione 4.3

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

Dimostrazione: per ottenere la formula che ci dà $P(E \cup F)$, notiamo dapprima che $E \cup F$ può essere scritto come unione dei due eventi disgiunti E e $E^c F$. Grazie all'Assioma 3 otteniamo

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cup E^c F) \\ &= P(E) + P(E^c F) \end{aligned}$$

Inoltre, essendo $F = EF \cup E^c F$, e applicando nuovamente l'Assioma 3, abbiamo

$$P(F) = P(EF) + P(E^c F)$$

o, equivalentemente, che

$$P(E^c F) = P(F) - P(EF)$$

che completa la dimostrazione. ■

La Proposizione 4.3 può essere dimostrata anche utilizzando il diagramma di Venn di Figura 2.4. Dividiamo $E \cup F$ in tre parti tra loro disgiunte, come mostrato in Figura 2.5. In altre parole, la parte I rappresenta l'insieme dei punti di E che non stanno in F (cioè $E F^c$); la parte II rappresenta l'insieme dei punti che stanno sia in E che in F (cioè EF); la parte III rappresenta infine i punti contenuti in F che non stanno in E (cioè $E^c F$). Dalla Figura 2.5 se vede che

$$\begin{aligned} E \cup F &= I \cup II \cup III \\ E &= I \cup II \\ F &= II \cup III \end{aligned}$$

Essendo I, II e III tra loro disgiunte, per l'Assioma 3 avremo che

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(I) + P(II) + P(III) \\ P(E) &= P(I) + P(II) \\ P(F) &= P(II) + P(III) \end{aligned}$$

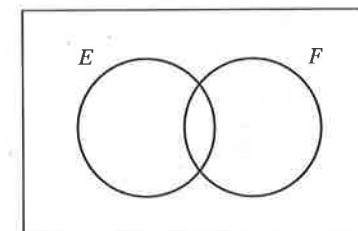


Figura 2.4 Diagramma di Venn.

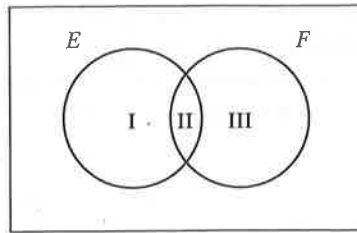


Figura 2.5 Parti del diagramma di Venn.

dal quale si deduce che

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(\text{II})$$

e la Proposizione 4.3 risulta provata, essendo $\text{II} = EF$.

Esempio 4a. Giovanna decide di portare con sé due libri per le vacanze. Con probabilità pari a 0.5 le piacerà il primo libro, con probabilità pari a 0.4 le piacerà il secondo e con probabilità pari a 0.3 le piaceranno entrambi i libri. Quanto vale la probabilità che non le piaccia nessuno dei due libri?

Soluzione Denotiamo con B_i l'evento che a Giovanna piaccia il libro $i, i = 1, 2$. Allora la probabilità che le piaccia almeno un libro sarà pari a

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6$$

Poiché l'evento che a Giovanna non piaccia nessuno dei due libri è il complementare dell'evento che gliene piaccia almeno uno, otteniamo il risultato

$$P(B_1^c B_2^c) = P((B_1 \cup B_2)^c) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 0.4 \quad \blacksquare$$

Possiamo anche calcolare la probabilità che almeno uno tra gli eventi E, F e G si verifichi:

$$P(E \cup F \cup G) = P[(E \cup F) \cup G]$$

che grazie alla Proposizione 4.3 è eguale

$$P(E \cup F) + P(G) - P[(E \cup F)G]$$

Ora, per la legge distributiva abbiamo che gli eventi $(E \cup F)G$ e $EG \cup FG$ sono equivalenti e quindi dalla precedente equazione otteniamo

$$\begin{aligned} P(E \cup F \cup G) &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG \cup FG) \\ &= P(E) + P(F) - P(EF) + P(G) - P(EG) - P(FG) + P(EGFG) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(EF) - P(EG) - P(FG) + P(EFG) \end{aligned}$$

Infatti, la seguente proposizione può essere provata per induzione su n .

Proposizione 4.4 Principio di inclusione/esclusione

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) &= \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ &\quad + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n) \end{aligned}$$

La sommatoria $\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r})$ è calcolata per tutti gli $\binom{n}{r}$ possibili sottoinsiemi di dimensione r dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$.

La Proposizione 4.4 stabilisce che la probabilità dell'unione di n eventi è uguale alla somma delle probabilità di questi eventi, meno la somma delle probabilità delle intersezioni degli eventi presi a due a due, più la somma delle probabilità delle intersezioni degli eventi presi a tre a tre e così via.

OSSERVAZIONI. 1. Per una dimostrazione della Proposizione 4.4 che non usi un procedimento di induzione su n , si noti dapprima che se un esito dello spazio campionario non appartiene a nessuno tra gli eventi E_i , allora la sua probabilità non darà un contributo ai due termini a destra e sinistra della equazione. Al contrario, supponiamo che un esito sia in esattamente m degli eventi E_i , con $m > 0$. Allora, essendo contenuto nell'unione $\bigcup_i E_i$, la sua probabilità viene contata una volta nel termine $P(\bigcup_i E_i)$; inoltre essendo

questo esito contenuto in $\binom{m}{k}$ sottoinsiemi del tipo $E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_k}$, la sua probabilità è contata

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \dots \pm \binom{m}{m}$$

volte nel termine a destra della equazione della Proposizione 4.4. Perciò, per $m > 0$, dobbiamo provare che

$$1 = \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \dots \pm \binom{m}{m}$$

Tuttavia, essendo $1 = \binom{m}{0}$, la precedente equazione è equivalente a

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i = 0$$

e quest'ultima equazione segue dal teorema del binomio, essendo

$$0 = (-1 + 1)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i (1)^{m-i}$$

2. La seguente formula è un modo compatto per scrivere il principio di inclusione/esclusione

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} P(E_{i_1} \dots E_{i_r})$$

3. Se ci arrestiamo al primo termine nell'identità del principio di inclusione/esclusione, otteniamo un limite superiore alla probabilità dell'unione di n eventi, se ci arrestiamo al secondo termine otteniamo un limite inferiore, se procediamo fino al terzo termine di nuovo un limite superiore e così via aggiungendo un termine alla volta. Più precisamente, per eventi E_1, \dots, E_n

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) \quad (4.1)$$

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) \geq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{j < i} P(E_i E_j) \quad (4.2)$$

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{j < i} P(E_i E_j) + \sum_{k < j < i} P(E_i E_j E_k) \quad (4.3)$$

e così via. Per provare queste disuguaglianze usiamo la seguente identità

$$\cup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_1^c E_2 \cup E_1^c E_2^c E_3 \cup \dots \cup E_1^c \dots E_{n-1}^c E_n$$

Infatti, almeno uno tra gli eventi E_i si verifica se si verifica l'evento E_1 , oppure, se E_1 non si è verificato, si verifica l'evento E_2 , oppure, se E_1 e E_2 non si sono verificati, si verifica E_3 , e così via. Siccome l'unione a destra è formata da eventi a 2 a 2 disgiunti, vale

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^n E_i) &= P(E_1) + P(E_1^c E_2) + P(E_1^c E_2^c E_3) + \dots + P(E_1^c \dots E_{n-1}^c E_n) \\ &= P(E_1) + \sum_{i=2}^n P(E_1^c \dots E_{i-1}^c E_i) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ora definiamo $B_i = E_1^c \dots E_{i-1}^c = (\cup_{j < i} E_j)^c$ l'evento che nessuno dei primi $i - 1$ eventi si sia verificato. Applicando l'identità

$$P(E_i) = P(B_i E_i) + P(B_i^c E_i)$$

si ha che

$$P(E_i) = P(E_1^c \dots E_{i-1}^c E_i) + P(E_i \cup_{j < i} E_j)$$

o, il che è equivalente,

$$P(E_1^c \dots E_{i-1}^c E_i) = P(E_i) - P(\cup_{j < i} E_i E_j)$$

Sostituendo questa in (4.4) abbiamo

$$P(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P(\cup_{j < i} E_i E_j) \quad (4.5)$$

Poiché le probabilità sono sempre non negative, la disuguaglianza (4.1) segue direttamente dall'equazione (4.5). Ora, fissato i e applicando la disuguaglianza (4.1) a $P(\cup_{j < i} E_i E_j)$, otteniamo

$$P(\cup_{j < i} E_i E_j) \leq \sum_{j < i} P(E_i E_j)$$

che, grazie all'equazione (4.5), dà (4.2). Ora fissando i e applicando la disuguaglianza (4.2) a $P(\cup_{j < i} E_i E_j)$, otteniamo

$$\begin{aligned} P(\cup_{j < i} E_i E_j) &\geq \sum_{j < i} P(E_i E_j) - \sum_{k < j < i} P(E_i E_j E_k) \\ &= \sum_{j < i} P(E_i E_j) - \sum_{k < j < i} P(E_i E_j E_k) \end{aligned}$$

che, grazie all'equazione (4.5), dà (4.3). La successiva disuguaglianza di inclusione/esclusione si ottiene ora fissando i e applicando la disuguaglianza (4.3) a $P(\cup_{j < i} E_i E_j)$, e così via.

2.5 SPAZI CAMPIONARI CON ESITI EQUIPROBABILI

In molti esperimenti è naturale assumere che tutti gli esiti dello spazio campionario siano equiprobabili. Prima di tutto lo spazio campionario S dovrà essere un insieme finito, poniamo $S = \{1, 2, \dots, N\}$. Allora sarà naturale ipotizzare che

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\})$$

il che implica, grazie agli Assiomi 2 e 3 (perché?) che

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Per l'Assioma 3, avremo perciò che per ogni evento E

$$P(E) = \frac{\text{numero di elementi di } E}{\text{numero di elementi di } S}$$

A parole, se assumiamo che tutti gli esiti di un esperimento siano equiprobabili, allora la probabilità di ogni evento E è uguale alla proporzione degli esiti dello spazio campionario contenuti in E (con una formula abbastanza popolare: casi favorevoli su casi possibili).

Esempio 5a. Se lanciamo due dadi, qual è la probabilità che la somma dei valori sulla faccia superiore sia uguale a 7?

Soluzione Risolviamo questo problema assumendo che tutti i 36 possibili esiti siano equiprobabili. Poiché ci sono 6 possibili esiti - vale a dire (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) - che danno come somma dei dadi 7, la probabilità desiderata sarà uguale a $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ■

Esempio 5b. Se estraiamo 3 palline a caso da un'urna che contiene 6 palline bianche e 5 nere, qual è la probabilità che una sia bianca e le altre due nere?

Soluzione Se teniamo conto dell'ordine nel quale le palline sono state estratte, allora lo spazio campionario consiste di $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ esiti. Inoltre, ci sono $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ esiti nei quali la prima pallina estratta è bianca e le seconde due sono nere; $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ esiti nei quali la prima è nera, la seconda è bianca e la terza è nera e $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ esiti nei quali le prime due palline estratte sono nere e l'ultima è bianca. Quindi, supponendo che una estrazione casuale significhi che ogni possibile esito dello spazio campionario sia equiprobabile, si ottiene che la probabilità desiderata vale

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}$$

Questo problema si sarebbe potuto anche risolvere non tenendo conto dell'ordine nella estrazione delle tre palline. In questo caso lo spazio campionario è formato da $\binom{11}{3} = 165$ esiti possibili. Ora, ogni insieme di 3 palline corrisponde a $3!$ esiti del caso nel quale si teneva conto dell'ordine. Per questa ragione, se tutti gli esiti sono da ritenersi equiprobabili nel caso in cui si tenga conto dell'ordine, lo stesso dovrà chiaramente avvenire anche nel caso in cui non se ne tenga conto. Perciò, in questo secondo caso, si vede che la probabilità desiderata vale

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

che, chiaramente, coincide con il precedente risultato. ■

Quando un esperimento consiste nel selezionare a caso k oggetti da un insieme formato da n oggetti, abbiamo la flessibilità di scegliere che l'esito dell'esperimento sia una k -upla ordinata di oggetti o una k -upla non ordinata. Nel primo caso supporremo che ogni nuovo oggetto selezionato sia uno a caso degli oggetti fino a quel punto non ancora selezionati, mentre nel secondo caso supporremo che tutti i $\binom{n}{k}$ possibili sottoinsiemi di k oggetti abbiano la medesima probabilità di essere selezionati. Per esempio, supponiamo di dover selezionare a caso 5 persone da un gruppo di 20 individui formato da 10 coppie sposate e che si sia interessati a calcolare la probabilità $P(N)$ che i cinque individui selezionati non siano in relazione tra loro, ovvero che non ce ne siano due tra loro sposati. Se consideriamo lo spazio campionario formato dalle cinque di persone estratte, esso sarà formato da $\binom{20}{5}$ esiti equiprobabili. Un esito che non contenga alcuna coppia sposata può essere pensato come il risultato di un esperimento in sei passi: al primo passo si scelgono 5 delle 10 coppie che dovranno avere un membro nel gruppo scelto; ai cinque passi successivi uno dei 2 membri di ogni coppia selezionata dovrà poi essere scelto. Perciò ci saranno $\binom{10}{5} 2^5$ possibili esiti

nei quali 5 persone selezionate non sono in relazione tra loro, e la probabilità desiderata sarà

$$P(N) = \frac{\binom{10}{5} 2^5}{\binom{20}{5}}$$

Al contrario, possiamo decidere di tener conto dell'ordine nel selezionare le 5 persone. In questo caso ci sono $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ possibili quinte ordinate di persone, delle quali $20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12$ risultano formate da un gruppo di 5 persone che non siano in relazione tra loro, che porta al seguente risultato

$$P(N) = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}$$

Viene lasciato al lettore verificare come le due soluzioni siano effettivamente uguali.

Esempio 5c. Una commissione di 5 persone viene estratta da un gruppo composto di 6 uomini e 9 donne. Se la selezione avviene in modo casuale, qual è la probabilità che la commissione consti di 3 uomini e 2 donne?

Soluzione Supponiamo che la locuzione "in modo casuale" significhi che ognuna delle $\binom{15}{5}$ possibili combinazioni venga estratta in modo equiprobabile. La probabilità desiderata è pari a

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

Esempio 5d. Un'urna contiene n palline, delle quali una è speciale. Se estraiamo k palline una alla volta, in modo tale che a ogni estrazione la probabilità di estrarre una qualunque delle palline rimanenti sia la stessa, qual è la probabilità che la pallina speciale sia estratta?

Soluzione Essendo ogni singola pallina trattata in maniera equivalente, segue che l'insieme di k palline estratte è uno qualunque dei $\binom{n}{k}$ possibili insiemi di k palline, tra loro equiprobabili. Perciò

$$P\{\text{la pallina speciale viene estratta}\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

In maniera alternativa si può ottenere il precedente risultato nel seguente modo: definiamo A_i come l'evento che la pallina speciale sia ottenuta all' i -esima estrazione, $i = 1, \dots, k$. Allora, avendo ognuna delle n palline uguale probabilità di essere scelta all' i -esima estrazione, segue che $P(A_i) = 1/n$.

Perciò, essendo gli eventi chiaramente a due a due disgiunti, abbiamo che

$$P\{\text{la pallina speciale viene estratta}\} = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = \frac{k}{n}$$

Avremmo anche potuto affermare che $P(A_i) = 1/n$, notando che ci sono $n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!$ esiti equiprobabili dell'esperimento, dei quali $(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)(1)(n-i)\cdots(n-k+1) = (n-1)!/(n-k)!$ risultano avere come i -esima pallina estratta quella speciale. Da ciò segue che

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Esempio 5e. Supponiamo che $n + m$ palline, delle quali n siano rosse e m blu, vengano disposte in fila in modo tale che ognuna delle $(n + m)!$ possibili disposizioni sia equiprobabile. Se siamo interessati solo alla successione dei colori delle palline disposte in fila, si provi che tutti i possibili risultati rimangono equiprobabili.

Soluzione Consideriamo ognuna delle $(n + m)!$ possibili disposizioni ordinate delle palline: se permutiamo tra loro le palline rosse e facciamo lo stesso con le palline blu, la successione dei colori chiaramente non cambia. Come risultato, otteniamo che ogni successione dei colori corrisponde a $n! m!$ differenti disposizioni ordinate delle $n + m$ palline, così che ogni distribuzione di colori ha probabilità $\frac{n! m!}{(n + m)!}$ di verificarsi.

Per esempio, supponiamo che ci siano 2 palline rosse, numerate r_1, r_2 , e 2 palline blu, numerate b_1 e b_2 . Allora, delle $4!$ possibili disposizioni ordinate delle palline, ci saranno $2! 2!$ distribuzioni che daranno la medesima distribuzione di colori. Per esempio, le seguenti 4 disposizioni ordinate di palline si riferiscono all'unica distribuzione di colori alternati rosso, blu, rosso, blu:

$$r_1, b_1, r_2, b_2 \quad r_1, b_2, r_2, b_1 \quad r_2, b_1, r_1, b_2 \quad r_2, b_2, r_1, b_1$$

Quindi ognuna delle possibili disposizioni di colori ha probabilità $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ di verificarsi.

Esempio 5f. Una mano a poker è formata da 5 carte. Abbiamo una scala semplice, se le carte hanno valori distinti e consecutivi e non hanno tutte il medesimo seme. Per esempio, una mano che consista del cinque di picche, sei di picche, sette di picche, otto di picche e nove di cuori è una scala semplice. Qual è la probabilità che uno riceva una scala semplice?

Soluzione Partiamo assumendo che tutte le $\binom{52}{5}$ possibili mani di poker (cioè gli insiemi di 5 carte) siano equiprobabili. Per determinare il numero di mani che danno una scala semplice, iniziamo valutando quante mani ci danno una scala semplice formata da un asso, un due, un tre, un quattro e un cinque (senza tenere conto dei semi). Essendoci 4 assi, 4 due, ecc., abbiamo esattamente 4^5 mani con-

tenenti un asso, un due, un tre, un quattro e un cinque. Poiché in 4 di queste mani abbiamo i quattro semi uguali (una tale mano si chiama scala reale), segue che ci sono $4^5 - 4$ mani che ci danno una scala semplice formata dall'asso, due, tre, quattro e cinque. In maniera analoga, ci sono $4^5 - 4$ mani che danno una scala formata dal dieci, fante, donna, re e asso. Concludendo, avremo $10(4^5 - 4)$ mani che danno una scala semplice. Perciò la probabilità che ci venga servita una scala semplice a poker è pari a

$$\frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039$$

Esempio 5g. Una mano a poker è detta un full se consiste di tre carte di un tipo (re, asso ecc.), più due carte di un altro tipo (cioè abbiamo un tris e una coppia). Qual è la probabilità che uno riceva un full?

Soluzione Di nuovo supponiamo che tutte le $\binom{52}{5}$ possibili mani di poker (cioè insiemi di 5 carte) siano equiprobabili. Per determinare il numero di full possibili, vediamo dapprima che per esempio ci sono $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$ differenti combinazioni di 2 dieci e 3 fanti. Essendoci 13 possibili scelte delle coppie e, dopo aver fissato una coppia di carte, 12 altre possibili scelte per le carte che formano il tris, segue che la probabilità di avere un full vale

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} \approx 0.0014$$

Esempio 5h. In una partita a bridge, l'intero mazzo di 52 carte viene distribuito ai 4 giocatori. Qual è la probabilità che

- (a) un giocatore riceva 13 carte di picche;
- (b) ogni giocatore riceva un asso?

Soluzione (a) Definito E_i l'evento che l' i -esimo giocatore riceve tutte la carte di picche, allora

$$P(E_i) = \frac{1}{\binom{52}{13}}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Essendo gli eventi $E_i, i = 1, 2, 3, 4$, tra loro disgiunti, la probabilità che uno dei giocatori riceva tutte le carte di picche è

$$P(\bigcup_{i=1}^4 E_i) = \sum_i P(E_i) = 4/\binom{52}{13} \approx 6.3 \times 10^{-12}$$

(b) Per determinare il numero di suddivisioni delle carte nelle quali ogni singolo giocatore riceve un asso, lasciamo inizialmente gli assi da parte e notiamo che ci sono $\binom{48}{12, 12, 12, 12}$ possibili suddivisioni delle rimanenti 48 carte, se a ogni giocatore ne vanno 12. Essendoci 4! modi di distribuire gli assi si vede che il numero di possibili suddivisioni delle carte tra 4 giocatori nelle quali ognuno riceve esattamente un asso vale $4! \binom{48}{12, 12, 12, 12}$. Quindi la probabilità desiderata è

$$\frac{4! \binom{48}{12, 12, 12, 12}}{\binom{52}{13, 13, 13, 13}} \approx 0.105 \quad \blacksquare$$

Alcuni risultati del calcolo delle probabilità possono risultare alquanto sorprendenti. I prossimi due esempi illustrano questo fenomeno.

Esempio 5i. Se in una stanza ci sono n persone, qual è la probabilità che nessuno tra loro festeggi il compleanno lo stesso giorno dell'anno? Quanto grande deve essere n , affinché questa probabilità sia minore di $\frac{1}{2}$?

Soluzione Supponendo che ogni persona possa avere il compleanno in uno qualsiasi dei giorni dell'anno, ci saranno un totale di $(365)^n$ possibili esiti (escludiamo la possibilità che qualcuno possa compiere gli anni il 29 febbraio). Supponendo che ogni esito sia equiprobabile, si vede che la probabilità desiderata vale $(365)^{-n}$. È abbastanza sorprendente che, se ci sono 23 o più persone nella stanza, allora questa probabilità è minore di $\frac{1}{2}$. Questo significa che se in una stanza ci sono più di 23 persone, allora la probabilità che almeno due compiano gli anni il medesimo giorno è maggiore di $\frac{1}{2}$. Molte persone sono inizialmente sorprese da questo risultato, poiché 23 sembra un numero molto piccolo rispetto a 365, il numero dei giorni dell'anno. Tuttavia, ogni coppia di persone ha probabilità $\frac{365}{(365)^2} = \frac{1}{365}$ di avere il compleanno lo stesso giorno, e in un

gruppo di 23 persone ci sono $\binom{23}{2} = 253$ differenti coppie di individui. Visto sotto quest'ottica, il risultato non appare più così sorprendente.

Quando ci sono 50 persone in una stanza, la probabilità che almeno due festeggino il compleanno il medesimo giorno è approssimativamente pari a 0.970. Se prendiamo 100 persone, questa probabilità risulta maggiore di $\frac{3 \times 10^6}{3 \times 10^6 + 1}$. ■

Esempio 5j. Mescoliamo un mazzo formato da 52 carte da gioco e giriamo una carta alla volta fino a quando appare il primo asso. È più probabile che la carta successiva al primo asso sia l'asso di picche o il due di fiori?

Soluzione Per determinare la probabilità che la carta che segue il primo asso sia l'asso di picche, abbiamo bisogno di determinare quante delle $(52)!$ possibili distribuzioni ordinate delle carte verificano questa proprietà. Prima di tutto notiamo che ogni distribuzione ordinata delle 52 carte può essere ottenuta distribuendo prima le 51 carte diverse dall'asso di picche e quindi inserendo in una qualsiasi posizione dell'ordinamento quest'ultimo. Inoltre, per ognuna delle $(51)!$ distribuzioni ordinate delle altre carte, ci sarà un'unica possibile posizione per l'asso di picche in modo che segua il primo asso. Per esempio, se la distribuzione ordinata delle 51 carte è

$$4f, 6c, Jq, 5p, Af, 7q, \dots, Kc$$

allora l'unica posizione in cui possiamo inserire l'asso di picche affinché la distribuzione ordinata delle 52 carte abbia quest'asso nella posizione desiderata sarà

$$4f, 6c, Jq, 5p, Af, Ap, 7q, \dots, Kc$$

Perciò è evidente che ci sono $(51)!$ distribuzioni ordinate nelle quali l'asso di picche segue il primo asso e abbiamo

$$P\{\text{l'asso di picche segue il primo asso}\} = \frac{(51)!}{(52)!} = \frac{1}{52}$$

Utilizzando il medesimo ragionamento si prova che la probabilità che il due di fiori segua il primo asso è ugualmente pari a $\frac{1}{52}$. Più in generale si può provare che ognuna delle 52 carte ha la medesima probabilità di apparire dopo il primo asso!

Molte persone trovano questo risultato alquanto sorprendente. Infatti, può sembrare abbastanza naturale pensare che la probabilità che sia il due di fiori (invece che l'asso di picche) a seguire il primo asso sia maggiore, potendo essere il primo asso quello di picche. Questa prima intuizione viene spesso seguita dal seguente ragionamento: il due di fiori potrebbe essere lei stessa la carta immediatamente precedente il primo asso. Così la precedente apparente asimmetria potrebbe essere bilanciata. Però, essendoci una probabilità su quattro che l'asso di picche sia il primo asso della sequenza e una probabilità su cinque che il due di fiori appaia prima del primo asso, di nuovo potrebbe sembrare che il due di fiori dovrebbe essere più probabile. Chiaramente nemmeno questo è corretto e solo un ragionamento più approfondito (come quello fatto all'inizio) può dimostrarci come in effetti le probabilità coincidano. ■

Esempio 5k. Una squadra di football americano è formata da 20 giocatori offensivi e 20 giocatori difensivi. I giocatori devono essere suddivisi a coppie di due allo scopo di condividere la stanza nel centro allenamenti. Se i giocatori vengono scelti a caso, qual è la probabilità che non ci siano coppie formate da un giocatore di attacco e uno di difesa? Qual è la probabilità che ci siano esattamente $2i$ coppie difensore-attaccante, $i = 1, 2, \dots, 10$?

Soluzione Ci sono

$$\binom{40}{2, 2, \dots, 2} = \frac{(40)!}{(2!)^{20}}$$

modi di dividere 40 giocatori in 20 coppie *ordinate*. [Cioè ci sono $(40)!/2^{20}$ modi

di dividere i giocatori in una *prima* coppia, *seconda* coppia, e così via.] Perciò ci sono $(40)!/2^{20}(20)!$ modi di dividere i giocatori in coppie se non si tenga conto dell'ordine. Inoltre, già che un accoppiamento di tutti i giocatori risulterà non presentare coppie attaccante-difensore solamente se tutti i giocatori di attacco (e di difesa) saranno accoppiati tra loro, segue che ci sono $[(20)!/2^{10}(10)!]^2$ di tali accoppiamenti. Perciò la probabilità che non ci siano compagni di camera attaccante-difensore, chiamiamola P_0 , è data da

$$P_0 = \frac{\left(\frac{(20)!}{2^{10}(10)!}\right)^2}{(40)!} = \frac{[(20)!]^3}{[(10)!]^2(40)!} \cdot 2^{20}$$

Per determinare P_{2i} , la probabilità che ci siano esattamente $2i$ coppie attaccante-difensore, notiamo prima di tutto che ci sono $\binom{20}{2i}^2$ modi per selezionare $2i$ giocatori d'attacco e $2i$ giocatori di difesa che formeranno le coppie attaccante-difensore. Questi $4i$ giocatori possono essere accoppiati in $(2i)!$ possibili coppie attaccante-difensore. (Infatti il primo attaccante può essere accoppiato con ognuno dei $2i$ difensori, il secondo con ognuno dei rimanenti $2i - 1$ difensori e così via.) Siccome i rimanenti $20 - 2i$ attaccanti (e difensori) devono essere accoppiati tra di loro, segue che ci sono

$$\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20 - 2i)!}{2^{10-i}(10 - i)!} \right]^2$$

accoppiamenti di tutti i giocatori nei quali siano presenti esattamente $2i$ coppie attaccante-difensore. Perciò

$$P_{2i} = \frac{\binom{20}{2i}^2 (2i)! \left[\frac{(20 - 2i)!}{2^{10-i}(10 - i)!} \right]^2}{(40)!} \quad i = 0, 1, \dots, 10$$

Le P_{2i} , $i = 0, 1, \dots, 10$, possono ora essere calcolate oppure il loro valore può essere approssimato utilizzando la formula di Stirling che mostra come $n!$ possa essere approssimato da $n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$.

Per esempio, otteniamo che

$$P_0 \approx 1.3403 \times 10^{-6}$$

$$P_{10} \approx 0.345861$$

$$P_{20} \approx 7.6068 \times 10^{-6}$$

I successivi tre esempi mostrano l'utilità della Proposizione 4.4. Nell'Esempio 5l, l'uso della probabilità ci permette di ottenere una rapida soluzione a un problema di conteggio.

Esempio 5l. In un club sportivo, 36 soci giocano a tennis, 28 a squash e 18 a badminton. Inoltre, 22 soci giocano sia a tennis che a squash, 12 sia a tennis che a badminton, 9 sia a squash che a badminton e infine 4 giocano a tutti e tre gli sport. Quanti membri del club giocano ad almeno uno di questi sport?

Soluzione Sia N il numero dei membri del club e introduciamo la probabilità assumendo che un socio del club sia scelto a caso. Se per ogni sottoinsieme C di soci del club, definiamo $P(C)$ la probabilità che il socio scelto a caso vi appartenga, allora

$$P(C) = \frac{\text{numero dei soci in } C}{N}$$

Ora, se T denota l'insieme dei soci che giocano a tennis, S quello dei soci che giocano a squash e B quello dei soci che giocano a badminton, grazie alla Proposizione 4.4 abbiamo che

$$P(T \cup S \cup B) = P(T) + P(S) + P(B) - P(TS) - P(TB) - P(SB) + P(TSB)$$

$$= \frac{36 + 28 + 18 - 22 - 12 - 9 + 4}{N} = \frac{43}{N}$$

Quindi possiamo concludere che 43 soci del club giocano ad almeno uno dei tre sport. ■

Il prossimo esempio di questo paragrafo non presenterà solo una risposta sorprendente, ma sarà anche di interesse teorico.

Esempio 5m. Il problema degli accoppiamenti Supponiamo che N uomini a una festa gettino il proprio cappello al centro della sala. I cappelli vengono inizialmente mescolati e poi ogni uomo ne sceglie uno a caso. Qual è la probabilità che nessuno degli uomini scelga il proprio cappello?

Soluzione Calcoliamo da principio la probabilità che almeno un uomo scelga il proprio cappello. Denotiamo con E_i , $i = 1, 2, \dots, N$ l'evento che l' i -esimo uomo

scelga il suo cappello. Ora, grazie alla Proposizione 4.4, $P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right)$, la probabilità che almeno un uomo abbia scelto il suo cappello, è data da

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = \sum_{i=1}^N P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots$$

$$+ (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n})$$

$$+ \dots + (-1)^{N+1} P(E_1 E_2 \dots E_N)$$

Se consideriamo l'esito di questo esperimento come un vettore di N numeri, dove l' i -esimo elemento rappresenta il numero del cappello scelto dall'uomo i -esimo, ci sono $N!$ possibili esiti. [L'esito $(1, 2, 3, \dots, N)$ significa, per esempio, che ogni uomo ha scelto il suo cappello.] Inoltre, $E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_n}$, l'evento che ognuno degli n uomini i_1, i_2, \dots, i_n scelga il proprio cappello, può accadere in ognuno degli $(N - n)$

$(N - n - 1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (N - n)!$ possibili modi; infatti, dei rimanenti $N - n$ uomini, il primo sceglie uno qualunque degli $N - n$ cappelli, il secondo può scegliere ognuno degli $N - n - 1$ cappelli rimasti e così via. Perciò, supponendo che tutti gli $N!$ esiti siano equiprobabili, vediamo che

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \frac{(N - n)!}{N!}$$

Inoltre, siccome ci sono $\binom{N}{n}$ termini in $\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n})$, vediamo che

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \frac{N!(N - n)!}{(N - n)! n! N!} = \frac{1}{n!}$$

e quindi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}$$

Perciò la probabilità che nessuno degli uomini scelga il proprio cappello vale

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^N}{N!}$$

che, per N grande, può essere approssimata da $e^{-1} \approx 0.36788$. In altre parole, per N grande, la probabilità che nessun uomo scelga il proprio cappello è approssimativamente uguale a 0.37. (Quanti lettori sbagliandosi avrebbero pensato che tale probabilità dovesse tendere a 1 per $N \rightarrow \infty$?). ■

Un altro esempio che illustri l'utilità della Proposizione 4.4 è il seguente.

Esempio 5n. Se 10 coppie di sposi si siedono a caso intorno a un tavolo rotondo, si calcoli la probabilità che nessuna moglie sieda di fianco al proprio marito.

Soluzione Se definiamo $E_i, i = 1, 2, \dots, 10$ l'evento che l' i -esima coppia sieda a fianco, segue che la probabilità desiderata vale $1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right)$. Ora, grazie alla Proposizione 4.4,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right) = \sum_1^{10} P(E_i) - \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) + \cdots - P(E_1 E_2 \cdots E_{10})$$

Per calcolare $P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n})$, notiamo prima di tutto che ci sono $19!$ modi nei quali 20 persone possono sedersi attorno a un tavolo rotondo (perché?). Il numero di disposizioni nei quali uno specifico insieme di n uomini sieda al fianco della propria moglie può essere ottenuto più facilmente considerando dapprima le varie coppie come singole entità. In questo caso, dovremo distribuire $20 - n$ entità attorno a un tavolo rotondo e ci sono chiaramente $(20 - n - 1)!$ modi per

farlo. Finalmente, siccome ognuna delle n coppie sposate possono essere sedute vicine in due modi, abbiamo che ci sono $2^n(20 - n - 1)!$ disposizioni per le quali uno specifico insieme di n coppie sono sedute accanto. Perciò

$$P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_n}) = \frac{2^n(19 - n)!}{(19)!}$$

Di conseguenza, dalla Proposizione 4.4 otteniamo che la probabilità che almeno una coppia sieda accanto è pari a

$$\binom{10}{1} 2^1 \frac{(18)!}{(19)!} - \binom{10}{2} 2^2 \frac{(17)!}{(19)!} + \binom{10}{3} 2^3 \frac{(16)!}{(19)!} - \cdots - \binom{10}{10} 2^{10} \frac{9!}{(19)!} \approx 0.6605$$

e la probabilità cercata vale approssimativamente 0.3395. ■

***Esempio 5o. Strisce vincenti** Consideriamo una squadra di calcio che ha appena concluso il campionato con n vittorie e m sconfitte. Esaminando la successione delle vittorie e delle sconfitte, abbiamo la speranza di poter determinare se la squadra ha avuto serie di partite nelle quali sia stato più probabile vincere rispetto ad altri momenti della stagione. Un modo per ottenere qualche intuizione riguardo a questa domanda è contare il numero di strisce di partite vinte (cioè sequenze di vittorie consecutive) e poi vedere quanto probabile sia questo risultato quando tutte le possibili $(n + m)!/(n! m!)$ disposizioni ordinate delle n vittorie e delle m sconfitte siano supposti equiprobabili. Per esempio, se $n = 10, m = 6$ e la successione di esiti è $VVSSVVVSVSSSVVVV$, allora ci sono 4 strisce di partite vinte, delle quali la prima ha dimensione 2, la seconda 3, la terza 1 e la quarta 4.

Supponiamo ora che una squadra abbia n vittorie e m sconfitte. Supponiamo che tutte le $(n + m)!/(n! m!) = \binom{n + m}{n}$ disposizioni siano equiprobabili; calcoliamo la probabilità che ci siano esattamente r strisce vincenti. Per fare ciò, consideriamo da principio ogni vettore di numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_r con $x_1 + \cdots + x_r = n$, e vediamo quanti esiti danno come risultato r strisce vincenti nelle quali l' i -esima striscia ha dimensione $x_i, i = 1, \dots, r$. Per ogni simile esito, se definiamo con y_1 il numero di sconfitte presenti prima della prima striscia di partite vinte, con y_2 il numero di sconfitte presenti tra la prima e la seconda striscia vincente, ..., con y_{r+1} il numero di sconfitte dopo l'ultima striscia vincente, allora le y_i soddisfano

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{r+1} = m \quad y_1 \geq 0, y_{r+1} \geq 0, y_i > 0, i = 2, \dots, r$$

e l'esito può essere rappresentato schematicamente come

$$\underbrace{SS \dots S}_{y_1} \quad \underbrace{VV \dots V}_{x_1} \quad \underbrace{S \dots S}_{y_2} \quad \underbrace{VV \dots V}_{x_2} \quad \dots \quad \underbrace{VV}_{x_r} \quad \underbrace{S \dots S}_{y_{r+1}}$$

Perciò, il numero di esiti che danno r strisce vincenti, in cui la i -esima ha dimensione $x_i, i = 1, \dots, r$, è uguale al numero di interi y_1, \dots, y_{r+1} che soddisfano la pre-

cedente proprietà o, in maniera equivalente, al numero di interi positivi

$$\bar{y}_1 = y_1 + 1 \quad \bar{y}_i = y_i, i = 2, \dots, r, \quad \bar{y}_{r+1} = y_{r+1} + 1$$

che soddisfano a

$$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_{r+1} = m + 2$$

Grazie alla Proposizione 6.1 del primo capitolo, il numero di interi positivi che soddisfino tale equazione sono $\binom{m+1}{r}$. Perciò il numero totale di esiti che contengono esattamente r strisce vincenti è $\binom{m+1}{r}$ moltiplicato per il numero di interi positivi soluzioni di $x_1 + \dots + x_r = n$. Quindi, grazie di nuovo alla Proposizione 6.1, ci sono $\binom{m+1}{r} \binom{n-1}{r-1}$ esiti nei quali si presentano esattamente r strisce vincenti. Essendoci $\binom{n+m}{n}$ esiti equiprobabili, abbiamo che

$$P(\{r \text{ strisce vincenti}\}) = \frac{\binom{m+1}{r} \binom{n-1}{r-1}}{\binom{m+n}{n}} \quad r \geq 1$$

Per esempio, se $n = 8, m = 6$, allora la probabilità che ci siano 7 strisce vincenti vale $\frac{\binom{7}{7} \binom{7}{6}}{\binom{14}{8}} = 1/429$ se tutti gli $\binom{14}{8}$ esiti sono ugualmente probabili. Quindi, se l'esito fosse $VSVSVSVSVVSVSV$, allora possiamo sospettare che la probabilità di vittoria della squadra sia cambiata ogni volta. (In particolare, la probabilità che la squadra vinca è abbastanza alta dopo una sconfitta e bassa dopo una vittoria.) All'altro estremo, se l'esito fosse $VVVVVVVVSSSSSS$, allora ci sarebbe un'unica striscia vincente e siccome $P(\{1 \text{ striscia vincente}\}) = \frac{\binom{7}{1} \binom{7}{0}}{\binom{14}{8}} = 1/429$, apparirebbe di nuovo abbastanza improbabile che la probabilità di vittoria della squadra sia rimasta invariata in tutte le 14 partite. ■

***2.6 LA PROBABILITÀ COME FUNZIONE DI INSIEME CONTINUA**

Una successione di eventi $\{E_n, n \geq 1\}$ è detta una successione crescente se

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

mentre è detta successione decrescente se

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$$

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione crescente di eventi, allora definiamo un nuovo elemento, che denotiamo con $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$, nel seguente modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

In maniera simile, se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione decrescente di eventi, definiamo $\lim_n E_n$ come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Proviamo il seguente risultato.

Proposizione 6.1

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è una successione di eventi, crescente o decrescente, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n)$$

Dimostrazione: supponiamo, dapprima, che $\{E_n, n \geq 1\}$ sia crescente e definiamo gli eventi $F_n, n \geq 1$ come

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right)^c = E_n E_{n-1}^c \quad n > 1$$

dove abbiamo usato il fatto che $\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$, essendo gli eventi crescenti (ovvero contenuti ognuno nel successivo). A parole, F_n consiste di quegli esiti di E_n che non siano in alcuno dei precedenti $E_i, i < n$. È facile verificare che gli eventi F_n sono a due a due disgiunti e tali che

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcup_{i=1}^n E_i \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

Perciò

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

$$= \sum_1^{\infty} P(F_i) \quad (\text{grazie all'Assioma 3})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n P(F_i)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_1^n E_i\right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

il che prova il risultato quando $\{E_n, n \geq 1\}$ sia crescente.

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ è invece decrescente, allora la successione $\{E_n^c, n \geq 1\}$ sarà banalmente crescente; perciò dalle precedenti equazioni otteniamo

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c)$$

Essendo $\bigcup_1^\infty E_i^c = \left(\bigcap_1^\infty E_i\right)^c$, vediamo che

$$P\left(\left(\bigcap_1^\infty E_i\right)^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c)$$

o, equivalentemente, che

$$1 - P\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

ovvero

$$P\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

il che prova il risultato in questo caso. ■

Esempio 6a. Probabilità e paradossi Supponiamo di possedere un'urna infinitamente grande e una successione infinita di palline numerate 1, 2, 3, e così via. Consideriamo il seguente esperimento: un minuto prima di mezzanotte le palline numerate dall'1 al 10 vengono inserite nell'urna e la pallina 10 viene estratta (supponiamo che l'estrazione avvenga in modo immediato). A $\frac{1}{2}$ minuto da mezzanotte mettiamo nell'urna le palline numerate dall'11 al 20 e estraiamo la pallina numero 20. A $\frac{1}{4}$ di minuto dalla mezzanotte mettiamo nell'urna le palline numerate dal 21 al 30 e estraiamo la pallina numero 30. A $\frac{1}{8}$ di minuto da mezzanotte, mettiamo le palline dal 31 al 40 e estraiamo la pallina 40 e così via. La domanda che ci poniamo è: quante palline saranno contenute nell'urna a mezzanotte?

La risposta a questa domanda è chiaramente che ci saranno infinite palline nell'urna a mezzanotte, essendo ogni pallina con il numero diverso da $10n, n \geq 1$, contenuta a mezzanotte nell'urna. Quindi il problema è risolto quando operiamo l'esperimento nella maniera descritta sopra.

Cambiamo ora l'esperimento e supponiamo che a 1 minuto da mezzanotte inseriamo le palline numerate da 1 a 10 e estraiamo la pallina numero 1; a $\frac{1}{2}$ minuto da mezzanotte mettiamo nell'urna tutte le palline numerate dal 11 al 20 e estraiamo la pallina numero 2; a $\frac{1}{4}$ di minuto da mezzanotte inseriamo le palline dal 21 al 30 e estraiamo la pallina numero 3, e così via. In questo nuovo esperimento, quante palline conterrà l'urna a mezzanotte?

In maniera abbastanza sorprendente, la risposta è ora che a mezzanotte l'urna sarà vuota. Infatti, consideriamo una qualsiasi pallina – diciamo la pallina numero n . In un qualche istante prima della mezzanotte [più precisamente a $(\frac{1}{2})^{n-1}$ minuti dalla mezzanotte], questa pallina verrà estratta dall'urna. Perciò, per ogni n , la pallina numero n a mezzanotte non sarà contenuta nell'urna. Quindi in quel momento l'urna sarà vuota.

Siccome, per ogni n , il numero di palline nell'urna dopo l' n -esimo scambio è il medesimo per entrambe le variazioni dell'esperimento appena descritto, la maggior parte delle persone rimane sorpresa per i due risultati così differenti una volta che si passi al limite. È importante notare come la ragione per la quale i due risultati differiscono non sia in realtà un autentico *paradosso*, o una contraddizione matematica, quanto piuttosto sia dovuto alla logica del problema e come spesso l'intuizione non aiuti quando si affrontano problemi con infiniti oggetti. (Quest'ultima affermazione non risulti sorprendente: quando il matematico Georg Cantor sviluppò la teoria degli insiemi infiniti nella seconda metà del diciannovesimo secolo, molti insigni matematici la definirono senza senso e ridicolizzarono lo stesso Cantor per aver affermato che l'insieme dei numeri interi e degli interi pari hanno lo stesso numero di elementi.)

Quanto appena provato ci permette di affermare che il modo nel quale selezioniamo le palline estratte può risultare significativo. Infatti, nel primo caso solo le palline numerate $10n, n \geq 1$ erano state estratte, mentre nel secondo caso alla fine tutte le palline erano state estratte. Supponiamo ora che quando una pallina deve essere estratta, il numero viene scelto a caso tra quelli delle palline già contenute nell'urna. Per esempio, a 1 minuto da mezzanotte inseriremo le palline numerate dall'1 al 10 e sceglieremo tra queste a caso una pallina da estrarre, e così via. In questo caso, quante palline conterrà l'urna a mezzanotte?

Soluzione Proviamo che con probabilità 1, a mezzanotte l'urna sarà vuota. Consideriamo da principio la pallina numero 1. Definiamo con E_n l'evento che la pallina numero 1 sia ancora nell'urna dopo che siano state fatte n estrazioni. Chiaramente

$$P(E_n) = \frac{9 \cdot 18 \cdot 27 \cdots (9n)}{10 \cdot 19 \cdot 28 \cdots (9n + 1)}$$

[Per capire la formula precedente, si noti che se la pallina numero 1 è ancora nell'urna dopo n estrazioni, allora la prima pallina estratta poteva essere scelta tra 9, la seconda tra 18 (dopo la prima estrazione e la seconda immissione di palline ci sono 19 palline della quali una è la numero 1 che non viene estratta) e così via. Il denominatore si ottiene con un ragionamento analogo.]

Ora, l'evento che la pallina numero 1 è contenuta nell'urna a mezzanotte è semplicemente l'evento $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$. Essendo la successione degli eventi $E_n, n \geq 1$, decrescente, dalla Proposizione 6.1 otteniamo che

$$P\{\text{la pallina numero 1 è nell'urna a mezzanotte}\} \\ = P\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n) \\ = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+1} \right)$$

Proviamo ora che

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{9n+1} = 0$$

Essendo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+1} \right) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n+1}{9n} \right) \right]^{-1}$$

è equivalente dimostrare che

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n} \right) = \infty$$

Ora, per ogni $m \geq 1$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n} \right) \geq \prod_{n=1}^m \left(1 + \frac{1}{9n} \right) \\ = \left(1 + \frac{1}{9} \right) \left(1 + \frac{1}{18} \right) \left(1 + \frac{1}{27} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{9m} \right) \\ > \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{9m} \\ = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i}$$

Quindi, facendo tendere $m \rightarrow \infty$ e usando il fatto che $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i = \infty$ otteniamo

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{9n} \right) = \infty$$

Perciò, denotando con F_i l'evento che la pallina numero i è nell'urna a mezzanotte, abbiamo provato che $P(F_1) = 0$. In maniera analoga, possiamo provare che $P(F_i) = 0$ per ogni i . (Per esempio, ragionando allo stesso modo si può provare che $P(F_i) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+1} \right)$ per $i = 11, 12, \dots, 20$). In questo modo la proba-

bilità che l'urna non sia vuota a mezzanotte, $P\left(\bigcup_1^{\infty} F_i\right)$, soddisfa

$$P\left(\bigcup_1^{\infty} F_i\right) \leq \sum_1^{\infty} P(F_i) = 0$$

per la disuguaglianza di Boole (si veda l'Esercizio di autovalutazione 14).

Quindi, con probabilità 1, l'urna a mezzanotte sarà vuota. ■

2.7 LA PROBABILITÀ COME UNA MISURA DELLA FIDUCIA

Fino a ora abbiamo interpretato la probabilità di un evento di un dato esperimento come la misura di quanto frequentemente l'evento si verifichi quando l'esperimento venga ripetuto all'infinito. Tuttavia, ci sono altri usi correnti del termine probabilità. Per esempio, tutti noi abbiamo certamente sentito frasi del tipo: "c'è un 90 per cento di probabilità che Shakespeare abbia effettivamente scritto *Amleto*", oppure "la probabilità che Lee Oswald abbia agito da solo nell'assassinio del presidente J.F. Kennedy è 0.8". Come possiamo interpretare queste asserzioni?

La più semplice e naturale interpretazione che possiamo dare è che le probabilità sopra citate si riferiscono alla misura della fiducia che abbiamo nell'affermazione fatta. In altre parole, l'individuo che ha fatto le precedenti affermazioni è abbastanza certo che Oswald abbia agito da solo ed è ancora più certo che Shakespeare abbia scritto *Amleto*. Questa interpretazione della probabilità come misura della propria fiducia che un evento si verifichi viene solitamente definita come la interpretazione soggettiva della probabilità.

Appare logico supporre che una "misura della fiducia" debba soddisfare tutti gli assiomi della probabilità. Per esempio, se siamo certi al 70 per cento che Shakespeare abbia scritto il *Giulio Cesare* e al 10 per cento che lo abbia scritto Marlowe, allora è logico supporre che siamo certi all'80 per cento che lo abbia scritto Shakespeare o Marlowe. Quindi, se interpretiamo la probabilità come una misura della fiducia o come la frequenza relativa del numero di successi in una successione di prove, le proprietà matematiche rimangono invariate.

Esempio 7a. Supponiamo che in una corsa a 7 cavalli, si intuisca che i primi 2 cavalli abbiano ciascuno il 20 per cento di possibilità di vincere, che i cavalli 3 e 4 ne abbiano il 15 per cento a testa e che i rimanenti 3 cavalli abbiano ognuno il 10 per cento di possibilità di vittoria. Risulterà meglio scommettere alla pari che il vincitore sia uno dei primi tre cavalli o, sempre alla pari, che il vincitore sarà uno tra i cavalli 1, 5, 6 o 7?

Soluzione Basandoci sulle probabilità soggettive espresse prima, la probabilità di vittoria è per la prima scommessa pari a $0.2 + 0.2 + 0.15 = 0.55$, mentre nella seconda $0.2 + 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.5$. Perciò la prima scommessa appare più attraente. ■

Può essere utile notare che, supponendo che le probabilità soggettive fissate da una persona siano sempre consistenti con gli assiomi della probabilità, noi in realtà stiamo pensando a una persona ideale. Per esempio, se chiediamo a qualcuno quali pensa siano le probabilità che:

- (a) oggi piova,
- (b) domani piova,
- (c) piova sia oggi che domani,
- (d) piova o oggi o domani,

è molto facile che dopo averci pensato un po' su, la persona possa dare 30 per cento, 40 per cento, 20 per cento e 60 per cento come risposte. Sfortunatamente, tuttavia, queste risposte (o queste probabilità soggettive) non sono consistenti con gli assiomi della probabilità (perché?). Possiamo però sperare che, facendolo notare, la persona modifichi le risposte. (Una risposta che potremmo accettare è: 30, 40, 10 e 60 per cento).

RIASSUNTO

Sia S l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento. S è definito lo spazio campionario dell'esperimento. Un evento è un sottoinsieme di S . Se $A_i, i = 1, \dots, n$, sono eventi, allora $\bigcup_{i=1}^n A_i$, detto *unione* di questi eventi, consiste di tutti gli esiti che stiano in almeno uno degli eventi $A_i, i = 1, \dots, n$. In maniera simile, $\bigcap_{i=1}^n A_i$, talvolta scritto come $A_1 \cdots A_n$, è detto *intersezione* degli eventi A_i , e consiste di tutti gli esiti dell'esperimento che stanno in ognuno degli eventi $A_i, i = 1, \dots, n$.

Per ogni evento A , definiamo A^c l'insieme di tutti gli esiti dello spazio campionario che non stanno in A . Chiamiamo A^c *complementare* dell'evento A . L'evento S^c , che non contiene alcun esito, è denotato da \emptyset e si chiama evento *impossibile*. Se $AB = \emptyset$, allora diciamo che A e B sono disgiunti. Per ogni evento A dello spazio campionario S supponiamo che sia definito un numero $P(A)$, detto probabilità di A per il quale vale

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$
- (ii) $P(S) = 1$
- (iii) Per eventi a 2 a 2 disgiunti $A_i, i \geq 1$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$P(A)$ rappresenta la probabilità che l'esito dell'esperimento sia contenuto in A .

Si può provare che

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Un utile risultato è che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

che si può generalizzare, ottenendo

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n)$$

Se S è finito e ogni punto di S è equiprobabile, allora

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

dove $|E|$ indica il numero di esiti presenti nell'evento E .

$P(A)$ può essere interpretato sia come una frequenza relativa asintotica, che come una misura del grado di fiducia che un certo evento si possa verificare.

ESERCIZI

- Una scatola contiene 3 biglie, 1 rossa, 1 verde e 1 blu. Consideriamo l'esperimento che consiste nell'estrarre una biglia dalla scatola, reinserirla e quindi estrarre una seconda biglia. Si descriva lo spazio campionario. Si ripeta l'esercizio anche nel caso in cui la prima biglia estratta non venga reinserita.
- Si lancia un dado ripetutamente fino a quando appare un 6, momento nel quale si interrompe l'esperimento. Quale sarà lo spazio campionario di questo esperimento? Sia E_n l'evento che siano necessari n lanci per completare l'esperimento. Quali punti dello spazio campionario sono contenuti in E_n ? Che evento è $\left(\bigcup_1^{\infty} E_n\right)^c$?
- Lanciamo due dadi. Sia E l'evento che la somma dei due dadi sia un numero dispari; sia F l'evento che almeno uno dei due dadi dia 1; e sia G l'evento che la somma dei due dadi dia 5. Si descrivano gli eventi $EF, E \cup F, FG, EF^c$, e EFG .
- A, B , e C lanciano a turno una moneta. Il primo che ottiene testa vince. Lo spazio campionario dell'esperimento può essere definito nel seguente modo

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \dots, \\ 0000 \dots \end{cases}$$

- (a) Si interpreti lo spazio campionario.
- (b) Si definiscano i seguenti eventi in funzione di S :
 - (i) $A = \{A \text{ vince}\}$.
 - (ii) $B = \{B \text{ vince}\}$.
 - (iii) $(A \cup B)^c$.
 Si suppone che A è il primo a lanciare la moneta, poi lo fa B , quindi C , poi di nuovo A , e così via.
- 5. Un sistema è composto da 5 componenti, ognuno dei quali può essere funzionante oppure no. Si consideri un esperimento che consista nell'osservare lo stato di funzionamento di ogni componente e definiamo i singoli esiti con un vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, dove x_i è uguale a 1 se il componente è funzionante e a 0 se invece non lo è.
 - (a) Quanti esiti formano lo spazio campionario?
 - (b) Si supponga che il sistema funzioni se i componenti 1 e 2 siano entrambi funzionanti oppure se lo siano i componenti 3 e 4 o, da ultimo, se siano contemporaneamente funzionanti i componenti 1, 3 e 5. Sia W l'evento che il sistema sia funzionante. Si descrivano tutti gli esiti in W .
 - (c) Sia A l'evento che entrambi i componenti 4 e 5 non siano funzionanti. Quanti esiti sono contenuti in A ?
 - (d) Si descrivano tutti gli esiti contenuti in AW .
- 6. L'amministratore di un ospedale americano classifica i pazienti ricoverati per una ferita da arma da fuoco nel seguente modo: se hanno una assicurazione li contraddistingue con 1, e in caso contrario con 0; inoltre, in accordo con lo stato di salute al momento del ricovero, li classifica con b (buono), m (medio) oppure s (serio). Si consideri l'esperimento che consiste nel classificare questi pazienti.
 - (a) Si descriva un opportuno spazio campionario.
 - (b) Sia A l'evento che il paziente è in condizioni serie. Si descrivano gli esiti in A .
 - (c) Sia B l'evento che il paziente non sia assicurato. Si descrivano gli esiti in B .
 - (d) Si descrivano tutti gli esiti in $B^c \cup A$.
- 7. Si consideri un esperimento che consista nel determinare il tipo di lavoro, lavoratore dipendente o autonomo, e la propensione politica, destra, sinistra o centro, dei 15 componenti di una squadra di calcio amatoriale. Quanti sono gli esiti:
 - (a) dello spazio campionario;

- (b) dell'evento che almeno un giocatore abbia un lavoro dipendente;
 (c) dell'evento che nessuno dei giocatori si consideri di centro?
8. Supponiamo che A e B siano due eventi indipendenti per i quali $P(A) = 0.3$ e $P(B) = 0.5$. Qual è la probabilità che
- (a) A o B si verifichi;
 (b) A si verifichi e contemporaneamente B non si verifichi;
 (c) Sia A che B si verificano?
9. Un negozio accetta pagamenti sia con la carta di credito American Express che VISA. Un totale del 24 per cento dei clienti ha la carta American Express, il 61 per cento ha la VISA e l'11 per cento entrambe le carte. Che percentuale dei clienti ha una carta di credito accettata dal negozio?
10. Il 60 per cento degli studenti di una scuola non indossano né un anello né una collana. Il 20 per cento porta un anello e il 30 per cento una collana. Se scegliamo uno studente a caso, qual è la probabilità che indossi:
- (a) un anello o una collana;
 (b) un anello e una collana?
11. Il 28 per cento degli uomini statunitensi fuma sigarette, il 7 per cento sigari e il 5 per cento sia sigarette che sigari.
- (a) Qual è la percentuale degli uomini che non fumano sigarette né sigari?
 (b) Quale percentuale fuma sigari ma non sigarette?
12. Una scuola elementare offre corsi di tre lingue: uno di spagnolo, uno di francese e uno di tedesco. Ognuna di queste classi è aperta a ognuno dei 100 studenti della scuola. Nella classe di spagnolo ci sono 28 studenti, 26 in quella di francese e 16 in quella di tedesco. 12 studenti frequentano sia il corso di spagnolo che di francese, 4 sia quello di spagnolo che di tedesco e 6 sia quello di francese che di tedesco. Inoltre ci sono 2 studenti che frequentano tutti e tre i corsi di lingua.
- (a) Se scegliamo uno studente a caso, qual è la probabilità che non segua alcun corso di lingua?
 (b) Se scegliamo uno studente a caso, qual è la probabilità che frequenti un solo corso di lingua?
 (c) Se scegliamo a caso 2 studenti, qual è la probabilità che almeno 1 segua un corso di lingua?
13. Una città con 100 000 abitanti ha 3 quotidiani: I, II e III. La percentuale di lettori di questi giornali è la seguente:
- | | | |
|------------------|-----------------------|---------------------------|
| I: 10 per cento | I e II: 8 per cento | I e II e III: 1 per cento |
| II: 30 per cento | I e III: 2 per cento | |
| III: 5 per cento | II e III: 4 per cento | |
- (La precedente lista ci dice, per esempio, che 8000 persone leggono sia il I che il II quotidiano).
- (a) Si trovi il numero di persone che leggono un solo quotidiano.
 (b) Quante persone leggono almeno 2 quotidiani?
 (c) Se I e III sono quotidiani del mattino e II della sera, quanti leggono almeno un quotidiano del mattino oltre al quotidiano della sera?
 (d) Quanti non leggono nessun giornale?
 (e) Quanti leggono un solo quotidiano del mattino e uno della sera?
14. I seguenti dati sono ricavati dallo studio di un gruppo di 1000 lettori di una rivista. Con riferimento alla professione, lo stato matrimoniale e l'istruzione, c'erano 312 liberi professionisti, 470 sposati, 525 laureati, 42 liberi professionisti laureati, 147 laureati e sposati, 86 liberi professionisti sposati, e 25 liberi professionisti, laureati e sposati. Si provi che i numeri riportati dallo studio non possono essere corretti.

SUGGERIMENTO: si denotino con A , B e C , rispettivamente, gli insiemi dei liberi professionisti, sposati e laureati. Si scelga a caso una tra le 1000 persone e si usi la Proposizione 4.4 per provare che, se i numeri sopra elencati fossero corretti, allora $P(A \cup B \cup C) > 1$.

15. Se supponiamo che tutte le $\binom{52}{5}$ mani di poker siano equiprobabili, qual è la probabilità che venga servito
- (a) un colore? (Una mano si definisce un colore se tutte e 5 le carte hanno lo stesso seme.)
 (b) una coppia? (Questo capiterà quando le carte saranno a, a, b, c, d , con a, b, c e d distinte tra loro.)
 (c) un doppia coppia? (Questo capiterà quando le carte saranno a, a, b, b, c , con a, b e c distinte tra loro.)
 (d) un tris? (Questo capiterà quando le carte saranno a, a, a, b, c , con a, b e c distinte tra loro.)
 (e) un poker? (Questo capiterà quando le carte saranno a, a, a, a, b , con a e b distinte tra loro.)
16. Facciamo un lancio con 5 dadi da poker. (Ogni dado ha le 6 facce rappresentanti un asso, un re, una donna, un fante, un dieci e un nove.) Si provi che la probabilità che:
- (a) non ce ne siano due uguali è 0.0926;
 (b) si ottenga una coppia è 0.4630;
 (c) si ottenga una doppia coppia è 0.2315;
 (d) si ottenga un tris è 0.1543;
 (e) si ottenga un full è 0.0386;
 (f) si ottenga un poker è 0.0193;
 (g) siano tutti e 5 uguali è 0.0008.
17. Se 8 torri vengono disposte a caso su di una scacchiera, si calcoli la probabilità che nessuna torre possa mangiarne un'altra. Cioè, si calcoli la probabilità che nessuna riga né colonna contenga più di una torre.
18. Scegliamo due carte a caso da un mazzo di 52 carte da gioco. Qual è la probabilità che formino un blackjack? Cioè, qual è la probabilità che una delle carte sia un asso e l'altra sia un dieci, un fante, una donna o un re?
19. Due dadi equilibrati hanno entrambi due facce di colore rosso, due nere, una gialla e una bianca. Se lanciamo i due dadi, qual è la probabilità che si ottenga in entrambi i dadi una faccia del medesimo colore?
20. Si supponga di giocare a blackjack contro il banco. Da un mazzo di carte appena mescolato, qual è la probabilità che né voi né il banco riceva un blackjack?
21. In un quartiere residenziale vivono 20 famiglie, delle quali 4 hanno un solo figlio, 8 hanno due figli, 5 hanno tre figli, 2 quattro figli e 1 cinque figli.
- (a) Se scegliamo a caso una famiglia, qual è la probabilità che abbia i figli, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
 (b) Se scegliamo ora a caso uno dei figli, qual è la probabilità che esso appartenga a una famiglia nella quale ci sono i figli, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
22. Consideriamo il seguente modo di mescolare n carte da gioco. Prendiamo la prima carta e lanciamo una moneta: se otteniamo testa la lasciamo al suo posto, altrimenti se otteniamo croce la mettiamo in fondo al mazzo. Ripetiamo questa operazione per un totale di n volte, scegliendo di volta in volta la successiva carta del mazzo. Dopo che la moneta sarà stata lanciata n volte avremo fatto un giro completo di tutte le carte del mazzo. Per esempio, se $n = 4$ e l'ordine iniziale era 1, 2, 3, 4 e gli esiti dei lanci successivi della moneta è stato t, c, c, t , allora l'ordine finale delle carte sarà 1, 4, 2, 3. Supponendo che tutti i possibili esiti della successione degli n lanci della moneta siano equiprobabili, qual è la probabilità che l'ordine delle carte sia rimasto invariato?

23. Lanciamo un paio di dadi equilibrati. Qual è la probabilità che il secondo dado dia un valore maggiore del primo?
24. Se lanciamo due dadi, qual è la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia uguale a i ? Si trovi la risposta per $i = 2, 3, \dots, 11, 12$.
25. Una coppia di dadi viene lanciata fintanto che la loro somma dia 5 oppure 7. Si trovi la probabilità che il 5 venga ottenuto per primo.

SUGGERIMENTO: sia E_n l'evento che 5 si ottenga all' n -esimo lancio e che non si sia ottenuto né 5 né 7 nei precedenti $n - 1$ lanci. Si calcoli $P(E_n)$ e si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ è la probabilità richiesta.

26. Giochiamo al seguente gioco di dadi: Un giocatore lancia due dadi. Se la somma dei dadi è 2, 3 o 12, il giocatore perde; se la somma è 7 o 11, vince. Se il risultato è diverso da quei valori, il giocatore lancia nuovamente i dadi fino a che non ottenga come somma dei valori o la medesima del primo lancio o il 7. Se il gioco si arresta perché si è ottenuto un 7, allora si è perso, altrimenti se si presenta, prima del 7, la medesima somma del primo lancio, allora vince. Si calcoli la probabilità che un giocatore vinca a questo gioco.

SUGGERIMENTO: sia E_i l'evento che la prima somma è uguale a i e il giocatore ha vinto. La probabilità cercata sarà $\sum_{i=2}^{12} P(E_i)$. Per calcolare $P(E_i)$, definiamo gli eventi $E_{i,n}$ che la somma iniziale dà i e il giocatore vince all' n -esimo lancio dei dadi. Si provi che $P(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_{i,n})$.

27. Un'urna contiene 3 palline rosse e 7 nere. Due giocatori, A e B , estraggono uno alla volta una pallina dall'urna fino a che non viene estratta la prima pallina rossa. Si determini la probabilità che A estragga la pallina rossa. (A estrae la prima pallina, B la seconda, A la terza e così via. Le estrazioni vengono fatte senza reinserimento.)
28. Un'urna contiene 5 palline rosse, 6 blu e 8 verdi. Se estraiamo un blocco di 3 palline, qual è la probabilità che le palline abbiano
- il medesimo colore;
 - tre colori differenti?
- Si ripeta l'esercizio sotto l'ipotesi che estraiamo le tre palline una alla volta e che dopo ogni estrazione, segniamo che colore è uscito e reinseriamo la pallina nell'urna prima dell'estrazione successiva. Questo procedimento è noto come campionamento con reinserimento.
29. Un'urna contiene n palline bianche e m palline nere, dove n e m sono numeri positivi.
- Se estraiamo due palline, qual è la probabilità che abbiano il medesimo colore?
 - Se estraiamo una pallina, la rimettiamo nell'urna e quindi estraiamo una seconda pallina, qual è la probabilità che le due palline estratte abbiano il medesimo colore?
 - Si provi che la probabilità calcolata al punto (b) è sempre maggiore di quella calcolata al punto (a).
30. Due scuole hanno il club di scacchi formato, rispettivamente, da 8 e 9 giocatori. Quattro membri di ognuno dei due club vengono scelti a caso per una gara interscolastica. I 4 giocatori selezionati in ognuno dei due club vengono appaiati con quelli dell'altro e giocano una partita a scacchi. Supponiamo che Rebecca e sua sorella Elisa siano membri del club di scacchi di due scuole differenti. Qual è la probabilità che
- Rebecca ed Elisa giochino assieme;
 - Rebecca ed Elisa vengano scelte per rappresentare le loro rispettive scuole, ma non giochino una contro l'altra;
 - solo una tra Rebecca ed Elisa sia scelta per rappresentare la sua scuola?

31. Una squadra di basket è formata da 3 giocatori (una guardia, un'ala e un centro).
- Se scegliamo un giocatore a caso da tre squadre formate nel modo precedente, qual è la probabilità che venga selezionata una nuova squadra con guardia, ala e centro?
 - Qual è la probabilità che i 3 giocatori selezionati giochino tutti e tre nel medesimo ruolo?
32. Un gruppo di persone, formato da b ragazzi e g ragazze, viene disposto in fila in maniera casuale, cioè ognuna delle $(b + g)!$ permutazioni è assunta equiprobabile. Qual è la probabilità che la persona nella posizione i -esima, $1 \leq i \leq b + g$, sia una ragazza?
33. Una foresta contiene 20 alci, dei quali 5 vengono catturati, marchiati e quindi liberati. Dopo un certo tempo 4 delle 20 alci vengono catturate. Qual è la probabilità che 2 di esse siano marchiate? Che ipotesi state facendo?
34. Viene raccontato che il secondo Conte di Yarborough avesse dato 1000 a 1 che una mano di bridge di 13 carte contenesse almeno una carta di valore maggiore o uguale a dieci (cioè contenesse un dieci, un fante, una donna, un re o un asso). Al giorno d'oggi, una mano di bridge che non abbia nessuna carta maggiore di 9 viene detta un *Yarborough*. Qual è la probabilità che una mano di bridge scelta a caso sia un *Yarborough*?
35. Estraiamo 7 palline da una scatola che contiene 12 palline rosse, 16 palline blu e 18 palline verdi. Si determini la probabilità che:
- 3 rosse, 2 blu e 2 verdi vengano estratte;
 - almeno due palline rosse vengano estratte;
 - tutte le palline estratte abbiano il medesimo colore;
 - vengano estratte o esattamente 3 palline rosse o esattamente 3 palline blu.
36. Due carte vengono scelte a caso da un mazzo di 52 carte da gioco. Qual è la probabilità che esse
- siano entrambi assi;
 - abbiano il medesimo valore?
37. Una professoressa assegna agli studenti 10 problemi, informandoli che l'esame finale consisterà in 5 di questi scelti a caso. Se uno studente è riuscito a risolverne 7, qual è la probabilità che risponda esattamente a
- 5 dei problemi dell'esame finale;
 - almeno 4 dei problemi dell'esame finale?
38. Un cassetto contiene n calzini, 3 dei quali sono rossi. Qual è il valore di n per il quale la probabilità di scegliere un paio di calzini rossi del cassetto sia pari a $\frac{1}{2}$?
39. In una città ci sono 5 alberghi. Se un giorno 3 persone scelgono a caso un albergo dove pernottare, qual è la probabilità che ognuno scenda in un albergo diverso? Che ipotesi state facendo?
40. In una città ci sono 4 tecnici che riparano televisori. Se 4 apparecchi si rompono, qual è la probabilità che esattamente i tecnici vengano chiamati? Si risolva il problema per $i = 1, 2, 3, 4$. Quali ipotesi si stanno facendo?
41. Se lanciamo un dado 4 volte, qual è la probabilità che il 6 appaia almeno una volta?
42. Due dadi sono lanciati assieme n volte. Si calcoli la probabilità che una coppia di 6 appaia almeno una volta? Quanto deve essere grande n affinché questa probabilità sia almeno $\frac{1}{2}$?
43. (a) Se N persone, che includano A e B , sono disposte in fila, qual è la probabilità che A e B siano vicine?
- (b) Quanto vale la precedente probabilità se le persone vengono disposte in circolo?
44. Cinque persone, che denoteremo con le lettere A, B, C, D ed E , sono disposte in file. Supponendo che ogni possibile disposizione sia equiprobabile, qual è la probabilità che
- ci sia esattamente una persona tra A e B ;
 - ci siano esattamente due persone tra A e B ;
 - ci siano tre persone tra A e B ?

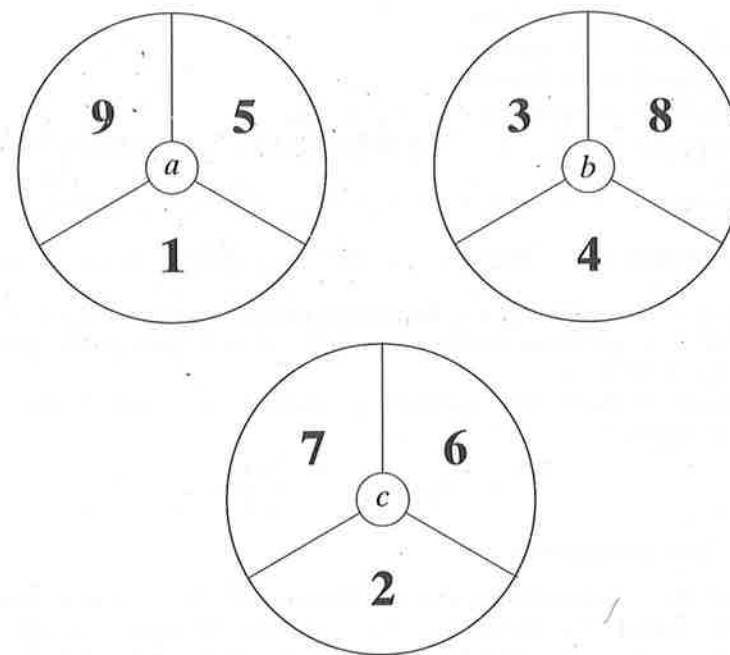
45. Una donna ha n chiavi, delle quali solo una apre la sua porta di casa.
 (a) Se lei prova le chiavi a caso, scartando di volta in volta quelle che non aprono, qual è la probabilità che riesca ad aprire la porta con la chiave k -esima?
 (b) Quanto vale questa probabilità se non scarta le chiavi provate in precedenza?
46. Quante persone devono esserci in una stanza affinché la probabilità che almeno due compiano gli anni il medesimo mese sia almeno $\frac{1}{2}$? Si assuma che tutti i possibili mesi siano equiprobabili.
47. Se in una stanza ci sono 12 estranei, qual è la probabilità che compiano gli anni in mesi tutti diversi?
48. Date 20 persone, qual è la probabilità che tra i 12 mesi dell'anno ce ne siano 4 contenenti esattamente 2 compleanni e 4 contenenti esattamente 3 compleanni?
49. Un gruppo di 6 uomini e 6 donne è diviso in maniera aleatoria in due gruppi di 6 elementi. Qual è la probabilità che entrambi i gruppi abbiano lo stesso numero di uomini?
50. In una mano di bridge, si determini la probabilità che una persona abbia 5 carte di picche e il suo compagno abbia le rimanenti 8 carte di picche.
51. Si supponga che n palline vengano distribuite a caso in N scatole. Qual è la probabilità che m palline finiscano nella prima scatola? Si assuma che le N^n disposizioni siano equiprobabili.
52. Un armadio contiene 10 paia di scarpe. Se scegliamo a caso 8 scarpe, qual è la probabilità che
 (a) ci sia nessun paio completo;
 (b) ci sia esattamente un paio completo?
53. Se 4 coppie di sposi sono sedute in fila, si trovi la probabilità che nessun marito sieda al fianco della propria moglie.
54. Si calcoli la probabilità che una mano di bridge manchi di almeno un seme. Si noti che la risposta non è

$$\frac{\binom{4}{1} \binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$$

Perché?

SUGGERIMENTO: si usi la Proposizione 4.4.

55. Si calcoli la probabilità che una mano di 13 carte contenga:
 (a) l'asso e il re di almeno un seme;
 (b) le 4 carte uguali di almeno uno dei 13 valori presenti (cioè i 4 assi, oppure i 4 due, e così via).
56. Due giocatori giocano al seguente gioco. Il giocatore A sceglie una delle trottolo riportate a pagina seguente e quindi B sceglie una tra le due rimanenti. Entrambi i giocatori girano la trottola e quella che si ferma sul numero maggiore è dichiarata vincitrice. Supponendo che ogni trottola sia equilibrata, preferireste essere il giocatore A o B ? Si spieghi la risposta.



ESERCIZI TEORICI

Si provino le seguenti relazioni.

- $EF \subset E \subset E \cup F$.
- Se $E \subset F$, allora $F^c \subset E^c$.
- $F = FE \cup FE^c$, e $E \cup F = E \cup E^c F$.
- $\left(\bigcup_1^\infty E_i\right)F = \bigcup_1^\infty E_i F$, e $\left(\bigcap_1^\infty E_i\right) \cup F = \bigcap_1^\infty (E_i \cup F)$.
- Per ogni successione di eventi E_1, E_2, \dots , definiamo una nuova successione F_1, F_2, \dots di eventi disgiunti (ovvero tale che $F_i F_j = \emptyset$ quando $i \neq j$) tale che per ogni $n \geq 1$,

$$\bigcup_1^n F_i = \bigcup_1^n E_i$$

- Siano E, F e G tre eventi. Si trovino le espressioni dei seguenti eventi in funzione di E, F , e G :
 (a) solo E si verifica;
 (b) sia E che G si verificano, mentre non si verifica F ;
 (c) almeno uno si verifica;
 (d) almeno due si verificano;
 (e) tutti e tre si verificano;
 (f) nessuno si verifica;
 (g) al più uno si verifica;
 (h) al più due si verificano;

- (i) esattamente due si verificano;
 - (j) al più tre di essi si verificano.
7. Si usino i diagrammi di Venn per
- (a) semplificare le espressioni $(E \cup F)(E \cup F^c)$;
 - (b) provare le leggi di De Morgan per gli eventi E e F [Cioè provare che $(E \cup F)^c = E^c F^c$ e $(EF)^c = E^c \cup F^c$].
8. Sia S un insieme. Se, per qualche $k > 0$, S_1, S_2, \dots, S_k sono sottoinsiemi non vuoti di S a

due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$, allora chiameremo l'insieme $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ una *partizione* di S . Denotiamo con T_n il numero di possibili partizioni di $\{1, 2, \dots, n\}$. Perciò, $T_1 = 1$ (l'unica partizione essendo $S_1 = \{1\}$) e $T_2 = 2$ (dove le due partizioni sono $\{\{1, 2\}\}$ e $\{\{1\}, \{2\}\}$).

- (a) Si provi, calcolando tutte le possibili partizioni, che $T_3 = 5$ e $T_4 = 15$.
- (b) Si provi che

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T_k$$

e lo si utilizzi per calcolare T_{10} .

SUGGERIMENTO: un modo per scegliere una partizione di $n + 1$ oggetti, consiste nel chiamare uno di questi *speciale*. Allora otteniamo differenti partizioni scegliendo dapprima un valore $k, k = 0, 1, \dots, n$, quindi un sottoinsieme di grandezza $n - k$ di oggetti non speciali e da ultimo ognuna delle T_k partizioni dei rimanenti k oggetti non speciali. Aggiungendo l'elemento speciale al sottoinsieme di dimensione $n - k$ otteniamo una partizione di $n + 1$ oggetti.

- 9. Supponiamo di ripetere un dato esperimento n volte. Per ogni evento E dello spazio campionario, sia $n(E)$ il numero di volte nel quale l'evento E si è verificato e definiamo $f(E) = n(E)/n$. Si provi che $f(\cdot)$ soddisfa gli Assiomi 1, 2 e 3.
- 10. Si provi che $P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E^c F G) - P(E F^c G) - P(E F G^c) - 2P(E F G)$.
- 11. Se $P(E) = 0.9$ e $P(F) = 0.8$, si dimostri che $P(EF) \geq 0.7$. In generale, si provi la disuguaglianza di Bonferroni

$$P(EF) \geq P(E) + P(F) - 1$$

- 12. Si provi che la probabilità che esattamente uno tra gli eventi E e F si verifichi è uguale a $P(E) + P(F) - 2P(EF)$.
- 13. Si provi che $P(EF^c) = P(E) - P(EF)$.
- 14. Si provi, per induzione, la Proposizione 4.4.
- 15. Un'urna contiene M palline bianche e N palline nere. Se estraiamo un blocco di r palline, qual è la probabilità che k di esse siano bianche?
- 16. Si provi, per induzione, la generalizzazione della disuguaglianza di Bonferroni per n eventi

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) \geq P(E_1) + \dots + P(E_n) - (n - 1)$$

- 17. Si consideri il problema degli accoppiamenti, Esempio 5m, e definiamo A_N il numero di modi nei quali N uomini possono scegliere un cappello in modo tali che nessuno selezioni il proprio. Si dimostri che

$$A_N = (N - 1)(A_{N-1} + A_{N-2})$$

Questa formula, posta la condizione iniziale $A_1 = 0, A_2 = 1$, permette di determinare il

valore di A_N , e la probabilità cercata sarà pari a $A_N/N!$.

SUGGERIMENTO: dopo che il primo uomo ha scelto un cappello che non è il suo, rimangono $N - 1$ uomini ed $N - 1$ cappelli. Tra i cappelli rimasti mancherà quello di uno degli $N - 1$ uomini. Perciò ci sarà un uomo senza il proprio cappello da poter scegliere e un cappello senza proprietario. Si deduca che non si può ottenere un accoppiamento uomo-cappello se l'uomo il cui cappello non è tra quelli rimasti, sceglie o non sceglie il cappello senza proprietario.

- 18. Sia f_n il numero di modi in cui si può lanciare n volte una moneta senza che si abbia mai per almeno due volte testa consecutivamente. Si provi che

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 2, \text{ dove } f_0 = 1, f_1 = 2$$

SUGGERIMENTO: quanti esiti iniziano con testa e quanti iniziano con croce?

Se P_n denota la probabilità che non ci siano mai successioni di almeno due teste quando lanciamo n volte una moneta, si trovi P_n (in termini di f_n) quando tutti i possibili esiti degli n lanci sono supposti equiprobabili. Si calcoli P_{10} .

- 19. Un'urna contiene n palline rosse e m palline blu. Ne estraiamo una alla volta fino a che un totale di $r, r \leq n$, palline rosse è stato estratto. Si trovi la probabilità che si siano dovute estrarre in totale k palline.

Piatto	Possibili scelte
Primo	Pasta o riso
Secondo	Pollo, pesce o manzo
Dolce	Gelato, macedonia, torta di mele o pesca

SUGGERIMENTO: si devono estrarre in totale k palline se si sono ottenute $r - 1$ palline rosse nelle prime $k - 1$ estrazioni e la k -esima pallina estratta è rossa.

- 20. Si consideri un esperimento il cui spazio campionario consista di un insieme numerabile di punti. Si provi che i punti non possono essere tutti equiprobabili. Possono avere tutti i punti probabilità positiva di verificarsi?
- *21. Si consideri l'Esempio 5o, che considerava il numero di strisce vincenti che si possono ottenere quando n vittorie e m sconfitte sono permutate in modo aleatorio. Si consideri ora il numero totale di strisce (vincenti e perdenti) e si provi che

$$P\{2k \text{ strisce}\} = 2 \frac{\binom{m-1}{k-1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$P\{2k + 1 \text{ strisce}\} = \frac{\binom{m-1}{k-1} \binom{n-1}{k} + \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

1. Un bar offre menù con 3 piatti. Si può scegliere un primo, un secondo e un dolce. Le possibili scelte sono elencate nella tabella seguente

Piatto	Possibili scelte
Primo	Pasta o riso
Secondo	Pollo, pesce o manzo
Dolce	Gelato, macedonia, torta di mele o pesca

Una persona deve scegliere un piatto di ogni categoria:

- (a) Quanti possibili esiti ha lo spazio campionario?
 (b) Sia A l'evento che si sceglie il gelato. Quanti esiti contiene A ?
 (c) Sia B l'evento che si sceglie il riso. Quanti esiti contiene B ?
 (d) Si elenchino tutti gli esiti contenuti nell'evento AB .
 (e) Sia C l'evento che si sceglie il pollo. Quanti esiti contiene C ?
 (f) Si elenchino tutti gli esiti contenuti nell'evento ABC .
2. Un cliente, che va al reparto abbigliamento di un grande magazzino, acquista con probabilità 0.22 un vestito, con probabilità 0.30 una maglietta e con probabilità 0.28 una cravatta. Compra invece sia un vestito sia una maglietta con probabilità 0.11, un vestito e una cravatta con probabilità 0.14 e una maglietta e una cravatta con probabilità 0.10. Per finire acquista tutti e 3 i capi con probabilità 0.06. Qual è la probabilità che un cliente:
 (a) non acquisti nessun capo;
 (b) acquisti esattamente uno solo dei precedenti oggetti?
3. Distribuiamo un mazzo di carte. Qual è la probabilità che la quattordicesima carta sia un asso? Qual è la probabilità che la quattordicesima carta sia il primo asso del mazzo?
4. Denotiamo con A l'evento che la temperatura in centro a Los Angeles sia di 70 gradi Fahrenheit, e con B l'evento che la temperatura in centro a New York sia di 70 gradi Fahrenheit. Inoltre, denotiamo con C l'evento che la temperatura massima tra quelle del centro di Los Angeles e di New York sia di 70 gradi Fahrenheit. Se $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, e $P(C) = 0.2$, si determini la probabilità che la temperatura minima tra quelle del centro di Los Angeles e di New York sia di 70 gradi Fahrenheit.
5. Un mazzo di 52 carte da gioco viene mescolato. Qual è la probabilità che le prime quattro carte abbiano:
 (a) valore diverso;
 (b) seme diverso?
6. L'urna A contiene 3 palline rosse e 3 palline nere, mentre l'urna B contiene 4 palline rosse e 6 palline nere. Se scegliamo a caso una pallina da ognuna delle due urne, qual è la probabilità che le due palline abbiano il medesimo colore?
7. In una lotteria, un giocatore deve scegliere 8 numeri tra l'1 e il 40. La commissione della lotteria seleziona 8 numeri tra i 40. Se supponiamo che tutte le $\binom{40}{8}$ possibili combinazioni possano uscire con uguale probabilità, qual è la probabilità che un giocatore abbia:
 (a) tutti gli 8 numeri estratti;
 (b) 7 dei numeri estratti;
 (c) almeno 6 dei numeri estratti?
8. Scegliamo a caso un comitato di 4 persone da un gruppo formato da 14 studenti universitari, dei quali 3 sono matricole, 4 sono al secondo anno, 4 al terzo e 3 al quarto. Si trovi la probabilità che nel comitato ci siano

- (a) uno studente di ogni tipo;
 (b) 2 del secondo anno e 2 del terzo;
 (c) solo studenti del secondo o del terzo anno.
9. Dato un insieme finito A , denotiamo con $N(A)$ il numero di elementi di A (la sua cardinalità).
 (a) Si provi che

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(AB)$$

- (b) Più in generale, si provi che

$$N\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i N(A_i) - \sum_{i < j} N(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n+1} N(A_1 \dots A_n)$$

10. Si consideri l'esperimento dato da una corsa di cavalli alla quale partecipano 6 cavalli numerati da 1 a 6, e supponiamo che lo spazio campionario consista di tutti i possibili 6! ordini di arrivo della gara. Sia A l'evento che il numero 1 finisca a uno dei primi tre posti e B l'evento che il numero 2 arrivi al secondo posto. Quanti esiti sono contenuti nell'evento $A \cup B$?
11. Distribuiamo una mano di 5 carte da un mazzo di 52 carte da gioco precedentemente mescolate. Qual è la probabilità che la mano contenga almeno una carta di ogni seme?
12. In una squadra di hockey ci sono 6 giocatori di attacco e 4 giocatori di difesa. Se dividiamo i giocatori a coppie, qual è la probabilità che ci siano esattamente due coppie formate da un attaccante e un difensore?
13. Supponiamo che una persona scelga a caso una lettera della parola OTTANTA e poi ne scelga una a caso dalla parola SCOPERTA. Qual è la probabilità che venga scelta la medesima lettera?
14. Si provi la disuguaglianza di Boole:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

15. Si provi che se $P(A_i) = 1$ per ogni $i \geq 1$, allora $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.
16. Denotiamo con $T_k(n)$ il numero di partizioni dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ formate da k sottoinsiemi non vuoti, dove $1 \leq k \leq n$. (Si veda l'Esercizio teorico 8 per la definizione di partizione). Si determini che

$$T_k(n) = kT_k(n-1) + T_{k-1}(n-1)$$

SUGGERIMENTO: quante partizioni contengono il sottoinsieme $\{1\}$ e quante il sottoinsieme, in cui è presente l'1 e che contiene altri elementi?

17. Scegliamo a caso cinque palline, senza reinserimento, da un'urna che ne contiene 5 rosse, 6 bianche e 7 blu. Si trovi la probabilità che venga scelta almeno una pallina di ogni colore.
18. Allineiamo in maniera casuale 4 palline rosse, 8 blu e 5 verdi.
 (a) Qual è la probabilità che le prime cinque palline siano blu?
 (b) Qual è la probabilità che nessuna delle prime cinque palline sia blu?
 (c) Qual è la probabilità che le ultime tre palline abbiano colori differenti?
 (d) Qual è la probabilità che le palline rosse siano tutte vicine tra loro?
19. Scegliamo a caso 10 carte da un mazzo di 52 carte formato da 13 carte di ognuno dei quattro semi. Dividiamo le dieci carte in base ai semi e raggruppiamole in quattro pile.
 (a) Qual è la probabilità che la pila più alta abbia 4 carte, la seconda 3, la terza 2 e la quarta 1?

- (b) Qual è la probabilità che due pile siano formate da 3 carte, una da 4 carte e l'ultima sia vuota?
20. Da una scatola contenente 20 palline rosse e 10 palline blu estraiamo in maniera casuale in successione tutte le palline. Qual è la probabilità che tutte le palline rosse vengano estratte prima che vengano estratte tutte quelle blu?

Probabilità condizionata e indipendenza

3.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo introduciamo la probabilità condizionata, uno dei concetti più importanti della teoria della probabilità. L'importanza del concetto è duplice. Innanzitutto si è spesso interessati a calcolare la probabilità di un evento disponendo di qualche informazione parziale. Inoltre, anche senza disporre di informazioni parziali, le probabilità condizionate sono spesso utilizzate per calcolare più facilmente le probabilità richieste.

3.2 PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Supponiamo di lanciare 2 dadi e che ciascuno dei 36 possibili esiti sia *equiprobabile* con probabilità $\frac{1}{36}$. Supponiamo inoltre di osservare che l'esito del primo dado è 3. Allora, data questa informazione, qual è la probabilità che la somma dei due dadi sia uguale a 8? Per calcolarla ragioniamo come segue: dato che il primo dado vale 3, vi sono al più 6 possibili esiti dell'esperimento, che sono (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5) e (3, 6). Dato che all'inizio questi esiti erano equiprobabili, essi devono avere anche ora la stessa probabilità. In altri termini, sapendo che il primo dado vale 3, la probabilità (condizionata) di ognuno degli esiti (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5) e (3, 6) è uguale a $\frac{1}{6}$, mentre la probabilità (condizionata) degli altri 30 punti dello spazio campionario è pari a 0. Pertanto la probabilità richiesta vale $\frac{1}{6}$.

Indicando con E e F , rispettivamente, l'evento che la somma dei dadi è 8 e l'evento che il primo dado dà 3, la probabilità appena calcolata si chiama la probabilità condizionata di E dato F e si indica con

$$P(E|F)$$

La formula generale per $P(E|F)$, valida per ogni coppia di eventi E, F si può dedurre in modo analogo quando la probabilità di un evento è data dalla frequenza dei casi favorevoli sui casi possibili: se F si realizza, E si realizza solo se si realizza EF ; la frequenza dei casi favorevoli è quindi pari a $P(EF)$. La frequenza dei casi possibili è invece pari a $P(F)$. Ciò motiva la seguente definizione.

Definizione

Se $P(F) > 0$, allora

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \quad (2.1)$$

Esempio 2a. Marco è convinto all'80% che le chiavi di casa che ha perso si trovino in una delle due tasche della giacca appesa sull'attaccapanni, e che al 40% stiano nella tasca destra e al 40% nella tasca sinistra. Se, dopo aver frugato nella tasca sinistra, Marco non vi trova le chiavi, qual è la probabilità condizionata che queste si trovino nell'altra tasca?

Soluzione Sia S l'evento che le chiavi si trovino nella tasca sinistra, D l'evento che si trovino nella tasca destra. La probabilità cercata è $P(D|S^c)$ e si ottiene come segue:

$$\begin{aligned} P(D|S^c) &= \frac{P(DS^c)}{P(S^c)} \\ &= \frac{P(D)}{1 - P(S)} = 2/3 \end{aligned}$$

Se ogni esito di uno spazio campionario finito S è ugualmente probabile, allora condizionando rispetto all'evento che l'esito stia in un sottoinsieme $F \subset S$, tutti gli esiti di F diventano ugualmente probabili. In questi casi è spesso conveniente calcolare la probabilità condizionata $P(E|F)$ utilizzando lo spazio F come spazio campionario. Infatti, lavorare con questo spazio ridotto conduce spesso ai risultati in modo più semplice. I nostri prossimi esempi illustrano questo punto di vista.

Esempio 2b. Una moneta viene lanciata due volte. Se supponiamo che i quattro punti dello spazio campionario $S = \{(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)\}$ siano equiprobabili, qual è la probabilità condizionata che venga testa in entrambi i lanci sapendo che (a) nel primo lancio è uscita testa; (b) esce testa in almeno un lancio?

Soluzione Se $E = \{(T, T)\}$ è l'evento corrispondente all'uscita di testa in entrambi i lanci, e $F = \{(T, T), (T, C)\}$ è l'evento corrispondente all'uscita di testa nel primo lancio, la probabilità cercata in (a) è allora data da

$$\begin{aligned} P(E|F) &= \frac{P(EF)}{P(F)} \\ &= \frac{P(\{(T, T)\})}{P(\{(T, T), (T, C)\})} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sia $A = \{(T, T), (T, C), (C, T)\}$; la soluzione di (b) è

$$P(E|A) = \frac{P(EA)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\{(T, T)\})}{P(\{(T, T), (T, C), (C, T)\})} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Pertanto, la probabilità condizionata che venga testa in entrambi i lanci sapendo che nel primo è uscita testa è $1/2$ mentre la probabilità condizionata che venga testa in entrambi i lanci sapendo che esce testa in almeno un lancio è solo $1/3$. Molti studenti trovano sorprendente quest'ultimo risultato. Essi ragionano pensando che, sapendo che un lancio dà testa, vi sono due possibilità: che esca testa in entrambi i lanci o che venga testa in uno solo dei due lanci. L'errore consiste nel supporre che questi due eventi siano ugualmente probabili. Infatti inizialmente vi sono 4 esiti ugualmente probabili. Sapere che esce testa in almeno un lancio significa escludere l'esito (C, C) ; si resta quindi con i 3 esiti ugualmente probabili (T, T) , (C, C) , (C, T) uno solo dei quali corrisponde all'evento che esca testa in entrambi i lanci. ■

Esempio 2c. Nel bridge le 52 carte sono distribuite equamente a 4 giocatori – chiamati Est, Ovest, Nord e Sud. Se Nord e Sud hanno in tutto 8 picche tra le loro carte, qual è la probabilità che Est abbia 3 delle 5 rimanenti picche?

Soluzione È più semplice procedere con lo spazio campionario ridotto. Dato che Nord-Sud hanno in tutto 8 picche tra le loro 26 carte, vi sono esattamente 5 picche nelle rimanenti 26 carte distribuite a Est-Ovest. Per la equiprobabilità di tali distribuzioni, segue che la probabilità condizionata che Est riceva 3 picche tra le sue 13 carte è

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} \approx 0.339$$

Esempio 2d. Susanna è indecisa se frequentare il corso di francese o quello di chimica e stima che la sua probabilità di prendere più di 27 è pari a $\frac{1}{2}$ nel caso del corso di francese e $\frac{2}{3}$ nel caso del corso di chimica. Se Susanna basa la decisione sull'esito del lancio di una moneta non truccata, qual è la probabilità che prenda più di 27 in chimica?

Soluzione Se C è l'evento "Susanna frequenta il corso di chimica" e A è l'evento "Susanna prende più di 27 all'esame, qualunque esso sia", la probabilità cercata è $P(CA)$. Essa si può calcolare tramite la Formula (2.2) che porge:

$$\begin{aligned} P(CA) &= P(C)P(A|C) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Esempio 2e. Da un'urna contenente 8 palline rosse e 4 palline bianche, si estraggono 2 palline senza rimpiazzo. (a) Supponendo che ogni pallina possa essere ugualmente estratta, qual è la probabilità che entrambe le palline estratte siano rosse? (b) Supponiamo ora che le palline rosse pesino r mentre le bianche pesino b . Si supponga inoltre che la probabilità che una data pallina nell'urna venga estratta

sia proporzionale al suo peso, cioè che essa sia uguale al suo peso diviso per la somma dei pesi delle palline presenti nell'urna. Qual è in tal caso la probabilità che entrambe le palline estratte siano rosse?

Soluzione Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima pallina è rossa" e "la seconda pallina è rossa". Ora, supponendo che la prima pallina estratta sia rossa, restano nell'urna 7 palline rosse e 4 palline bianche, sicché $P(R_2|R_1) = \frac{7}{11}$. Dato che $P(R_1)$ vale ovviamente $\frac{8}{12}$, la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} P(R_1R_2) &= P(R_1)P(R_2|R_1) \\ &= \binom{2}{3} \binom{7}{11} = \frac{14}{33} \end{aligned}$$

Alternativamente, si poteva ricavare il risultato con la formula

$$P(R_1R_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

Per quanto riguarda (b), sia ancora R_i l'evento che la i -esima pallina estratta è rossa e utilizziamo l'identità

$$P(R_1R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1)$$

Numeriamo ora le palline rosse e sia B_i , $i = 1, \dots, 8$ l'evento che la prima pallina rossa estratta sia la numero i . Allora

$$P(R_1) = \left(\bigcup_{i=1}^8 B_i \right) = \sum_{i=1}^8 (B_i) = 8 \frac{r}{8r + 4b}$$

Inoltre, sapendo che la prima pallina estratta è rossa, restano nell'urna 7 palline rosse e 4 palline bianche. Si ha quindi

$$P(R_2|R_1) = \frac{7r}{7r + 4b}$$

Di conseguenza, la probabilità che entrambe le palline siano rosse è

$$P(R_1R_2) = \frac{8r}{8r + 4b} \frac{7r}{7r + 4b} \quad \blacksquare$$

Una generalizzazione della Formula (2.2), che fornisce una espressione della probabilità della intersezione di un arbitrario numero di eventi, è spesso anche nota come legge delle probabilità composte.

La regola del prodotto

Se $P(E_1 \cdots E_{n-1}) > 0$, allora

$$P(E_1E_2E_3 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1})$$

Per provare la regola del prodotto, applichiamo la definizione di probabilità condizionata ai termini del secondo membro dell'uguaglianza precedente. Si ha allora

$$P(E_1) \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} \cdots \frac{P(E_1E_2 \cdots E_n)}{P(E_1E_2 \cdots E_{n-1})} = P(E_1E_2 \cdots E_n)$$

Esempio 2f. Nel problema degli accoppiamenti formulato nell'Esempio 5m del Capitolo 2, si è visto che P_N , la probabilità che non vi siano accoppiamenti quando N persone scelgono a caso un cappello tra i propri N cappelli, è data da

$$P_N = \sum_{i=0}^N (-1)^i / i!$$

Qual è la probabilità che esattamente k tra le N persone riprendano il proprio cappello?

Soluzione Fissiamo l'attenzione su un insieme costituito da k persone, e determiniamo la probabilità che solo queste, e non altre, riprendano il proprio cappello: indichiamo con E tale evento. Sia poi G l'evento che nessuna delle altre $N-k$ persone riprenda il proprio cappello; è

$$P(EG) = P(E)P(G|E)$$

Ora, sia F_i , $i = 1, \dots, k$, l'evento che l' i -esimo membro dell'insieme riprenda il proprio cappello. Allora

$$\begin{aligned} P(E) &= P(F_1F_2 \cdots F_k) = P(F_1)P(F_2|F_1)P(F_3|F_1F_2) \cdots P(F_k|F_1 \cdots F_{k-1}) \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \frac{1}{N-2} \cdots \frac{1}{N-k+1} \\ &= \frac{(N-k)!}{N!} \end{aligned}$$

Sapendo che ognuna delle k persone dell'insieme considerato riprende il proprio cappello, le rimanenti $N-k$ persone sceglieranno a caso fra i loro $N-k$ cappelli; di conseguenza la probabilità che nessuno di questi riprenda il proprio cappello coincide con la probabilità che nessuno riprenda il proprio cappello in un problema analogo a quello di partenza dove però solo $N-k$ persone scelgono uno dei loro $N-k$ cappelli. Di conseguenza

$$P(G|E) = P_{N-k} = \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i / i!$$

e pertanto la probabilità che un dato insieme di k persone riprenda il proprio cappello e il resto delle altre persone non lo riprenda è dato da

$$P(EG) = \frac{(N-k)!}{N!} P_{N-k}$$

Ora, dato che vi sono $\binom{N}{k}$ modi per individuare il gruppo di k persone che riprende il proprio cappello, la probabilità cercata vale

$$P(\text{esattamente } k \text{ incontri}) = P_{N-k}/k! \\ \approx e^{-1}/k! \quad \text{quando } N \text{ è sufficientemente grande} \quad \blacksquare$$

Utilizzeremo ora la regola del prodotto per risolvere in modo alternativo l'Esempio 5h(b) del Capitolo 2.

Esempio 2g. Un mazzo di 52 carte è suddiviso casualmente in 4 mazzetti di 13 carte ciascuno. Calcolare la probabilità che vi sia un asso in ogni mazzetto.

Soluzione Definiamo gli eventi $E_i, i = 1, 2, 3, 4$ come segue:

$$E_1 = \{\text{l'asso di picche è in uno dei mazzetti}\}$$

$$E_2 = \{\text{l'asso di picche e l'asso di cuori sono in mazzetti diversi}\}$$

$$E_3 = \{\text{gli assi di picche, di cuori e di quadri sono in tre mazzetti diversi}\}$$

$$E_4 = \{\text{i 4 assi sono in quattro mazzetti diversi}\}$$

La probabilità cercata coincide con $P(E_1 E_2 E_3 E_4)$ e, per la regola del prodotto, vale

$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2)P(E_4|E_1 E_2 E_3)$$

Si ha

$$P(E_1) = 1$$

dato che E_1 è lo spazio campionario S .

$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51}$$

dato che il mazzetto contenente l'asso di picche contiene 12 delle 51 carte che restano.

$$P(E_3|E_1 E_2) = \frac{26}{50}$$

dato che i mazzetti contenenti gli assi di picche e di cuori contengono 24 delle 50 carte che restano; e infine

$$P(E_4|E_1 E_2 E_3) = \frac{13}{49}$$

Di conseguenza, la probabilità che ogni mazzetto contenga esattamente un asso è

$$P(E_1 E_2 E_3 E_4) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0.105$$

Vi è quindi approssimativamente il 10.5% di possibilità che ogni mazzetto contenga un asso. (L'Esercizio 13 illustra un modo alternativo di utilizzo della regola del prodotto per risolvere l'esercizio.) \blacksquare

OSSERVAZIONE. La definizione data per $P(E|F)$ è coerente con l'interpretazione della probabilità come di una frequenza relativa a lungo termine. Per vederlo, si supponga di effettuare n ripetizioni dell'esperimento, con n grande. Allora se consideriamo solo gli esperimenti nei quali l'evento F si realizza, $P(E|F)$ coincide con la frequenza a lungo termine di quelli esperimenti nei quali anche E si realizza. Infatti, dato che $P(F)$

è la proporzione, a lungo termine, degli esperimenti nei quali F si realizza, si ha che nelle n ripetizioni dell'esperimento F si realizza all'incirca $nP(F)$ volte. Analogamente, E ed F si realizzano entrambi approssimativamente $nP(EF)$ volte. Pertanto, sui circa $nP(F)$ esperimenti nei quali F si realizza, la proporzione di quelli nei quali anche E si realizza è grosso modo pari a

$$\frac{nP(EF)}{nP(F)} = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

che è la definizione di $P(E|F)$.

3.3 LA FORMULA DI BAYES

Siano E e F due eventi con $0 < P(F) < 1$. Si può scrivere E come

$$E = EF \cup EF^c$$

dato che se un evento elementare sta in E , allora esso deve stare in E ed F o in E ma non in F (si veda la Figura 3.1). Dato che EF e EF^c sono disgiunti, per l'Assioma 3 si ha

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) \\ = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)] \quad (3.1)$$

La Formula (3.1) afferma che la probabilità di un evento E è la media ponderata della probabilità condizionata di E dato F e della probabilità condizionata di E dato il complementare di F - con pesi pari alle probabilità che si realizzi l'evento sul quale si condiziona. Si tratta di una formula estremamente utile in quanto essa permette di determinare la probabilità di un evento condizionandolo prima alla realizzazione o meno di un secondo evento. Come si vede dagli esempi che seguono, vi sono molti casi nei quali è arduo calcolare direttamente la probabilità di un evento, ma è immediato calcolarla sapendo che si realizza o non si realizza un secondo evento.

Esempio 3a (I parte). Una compagnia di assicurazioni suddivide le persone in due classi: quelle che sono propense a incidenti e quelle che non lo sono. Le statistiche dell'assicurazione mostrano che le persone propense a incidenti hanno probabilità 0.4 di avere un incidente in un anno, mentre questa probabilità scende a 0.2 per le altre persone. Supponendo che il 30% della popolazione sia propensa agli incidenti, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dall'acquisto della polizza?

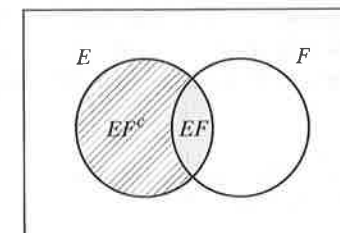


Figura 3.1 $E = EF \cup EF^c$.
 EF = Area ombreggiata;
 EF^c = Area tratteggiata.

Soluzione Otterremo la probabilità condizionando prima rispetto al fatto che il cliente considerato sia o meno propenso agli incidenti. Sia A_1 l'evento "l'assicurato ha un incidente entro un anno dall'acquisto della polizza" e sia A l'evento "l'assicurato è propenso agli incidenti". La probabilità $P(A_1)$ cercata vale allora

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|A)P(A) + P(A_1|A^c)P(A^c) \\ &= (0.4)(0.3) + (0.2)(0.7) = 0.26 \end{aligned}$$

Esempio 3a (II parte). Supponiamo che il nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dall'acquisto della polizza. Qual è la probabilità che si tratti di una persona propensa agli incidenti?

Soluzione La probabilità cercata è $P(A|A_1)$, che è data da

$$\begin{aligned} P(A|A_1) &= \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} \\ &= \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} \\ &= \frac{(0.3)(0.4)}{0.26} = \frac{6}{13} \end{aligned}$$

Esempio 3b. Si consideri il seguente gioco effettuato con un mazzo ordinario di 52 carte. Le carte sono mescolate e poi girate una alla volta. In ogni momento il giocatore può dire se la carta successiva sarà un asso di picche; egli vince se ciò avviene. Si decide inoltre che il giocatore vince anche se l'asso di picche non è ancora uscito quando resta una sola carta e il giocatore non si è ancora pronunciato. Qual è una buona strategia, qual è una cattiva strategia?

Soluzione Ogni strategia ha una probabilità di vincita pari a $1/52$. Dimostreremo per induzione un risultato più forte: se il mazzo ha n carte, una sola delle quali è un asso di picche, allora la probabilità di vincita è $1/n$ indipendentemente dalla strategia scelta. Il risultato è chiaramente vero se c'è una sola carta, supponiamolo vero per un mazzo di $n - 1$ carte e consideriamo un mazzo di n carte. Fissiamo una strategia, e sia p la probabilità che con questa strategia si dica al primo colpo che la carta è un asso di picche; quando ciò avviene, la probabilità di vittoria del giocatore è $1/n$. Quando ciò non avviene, cioè se seguendo questa strategia non si tenta di indovinare al primo colpo, allora la probabilità di vincita del giocatore è pari alla probabilità che la prima carta non sia l'asso di picche, ovvero $(n - 1)/n$, moltiplicata per la probabilità condizionata di vincita sapendo che la prima carta non è un asso di picche. Quest'ultima probabilità condizionata è uguale alla probabilità di vincita usando un mazzo di $n - 1$ carte contenente un unico asso di picche; per l'ipotesi induttiva essa vale $1/(n - 1)$. Di conseguenza, se con questa strategia non si tenta di indovinare al primo colpo, allora la probabilità di vincita è

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

Pertanto, se G è l'evento "il giocatore dice che la prima carta è un asso di picche", si ottiene che

$$\begin{aligned} P\{\text{vincita}\} &= P\{\text{vincita}|G\}P(G) + P\{\text{vincita}|G^c\}(1 - P(G)) \\ &= \frac{1}{n}p + \frac{1}{n}(1 - p) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Esempio 3c. In un test a risposte multiple uno studente può conoscere la risposta o tentare a caso. Sia p la probabilità che lo studente conosca la risposta e $1 - p$ la probabilità che lo studente risponda a caso. Supponiamo che la probabilità di rispondere correttamente scegliendo a caso sia $1/m$, dove m è il numero di risposte possibili. Lo studente risponde correttamente a una domanda; qual è la probabilità che lo studente conoscesse la risposta?

Soluzione Sia C l'evento "lo studente risponde correttamente alla domanda" e K l'evento "lo studente conosce la risposta". Si ha che

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K) + P(C|K^c)P(K^c)} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1 - p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m - 1)p} \end{aligned}$$

Per esempio, se $m = 5$, $p = \frac{1}{2}$, la probabilità che lo studente conosca la risposta alla quale ha risposto correttamente è $\frac{5}{6}$.

Esempio 3d. In un laboratorio di analisi l'esame del sangue è efficace al 95% nell'individuare una certa malattia quando essa è presente nell'organismo. L'esame tuttavia rileva anche dei "falsi positivi" nell'1% delle persone sane che si sottopongono all'esame. (Cioè, se l'esame è effettuato da una persona sana, allora, con probabilità 0.01, l'esame rivela che la persona è malata.) Se lo 0.5% della popolazione soffre della malattia, qual è la probabilità che una persona risultata positiva all'esame abbia la malattia?

Soluzione Sia D l'evento "la persona testata ha la malattia" e sia E l'evento "la persona è positiva all'esame". La probabilità cercata è $P(D|E)$ ed è data da

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(0.95)(0.005)}{(0.95)(0.005) + (0.01)(0.995)} \\
 &= \frac{95}{294} \approx 0.323
 \end{aligned}$$

Pertanto solo il 32% delle persone positive all'esame sono effettivamente malate. Molti studenti si stupiscono spesso del risultato (si aspettano infatti un valore superiore, ritenendo che l'esame del sangue sia un test valido); vale la pena allora presentare un secondo argomento che, pur essendo meno rigoroso, è forse più convincente del precedente.

Dato che lo 0.5% della popolazione soffre della malattia, in media si ha che 1 persona su 200 ha la malattia. L'esame confermerà che questa persona ha la malattia nel 95% dei casi. Quindi, su 200 persone testate, mediamente, l'esame confermerà che 0.95 hanno la malattia. D'altra parte, sulle 199 persone sane, l'esame dirà erroneamente che (199)(0.01) di queste sono malate. Pertanto, per ogni 0.95 persone malate e positive all'esame, vi sono (mediamente) (199)(0.01) persone sane e positive all'esame. Ne segue che la proporzione del numero di veri positivi sul numero totale di positivi è

$$\frac{0.95}{0.95 + (199)(0.01)} = \frac{95}{294} \approx 0.323 \quad \blacksquare$$

La Formula (3.1) è utile anche per riassumere delle probabilità alla luce di ulteriori informazioni. Vediamolo in alcuni esempi

Esempio 3e. Consideriamo un medico praticante alle prese con il dilemma seguente: "Se sono sicuro almeno all'80% che i miei pazienti abbiano questa malattia, allora prescrivo sempre il ricovero; se invece non ne sono così sicuro allora prescrivo degli esami addizionali, che però sono costosi e talvolta dolorosi". Inizialmente ero convinto solo al 60% che il Sig. Rossi avesse la malattia, così ho prescritto l'esame A, che dà sempre un risultato positivo quando il paziente ha la malattia e quasi mai positivo quando non ce l'ha. L'esame ha dato un esito positivo, ed ero pronto a prescrivere il ricovero quando Rossi mi ha informato, per la prima volta, che era diabetico. Questa informazione complica le cose in quanto, pur non modificando la mia stima iniziale che attribuiva il 60% di possibilità di avere la malattia, ciò altera l'interpretazione dei risultati dell'esame A. Infatti l'esame A, che non dà mai un risultato positivo quando il paziente non ha la malattia in questione, fornisce invece un risultato positivo nel 30% delle volte nel caso di pazienti diabetici che non soffrono della malattia. Ora cosa devo fare? Prescrivere altri esami o il ricovero?"

Soluzione Per decidere se prescrivere o meno il ricovero, il dottore deve prima calcolare la nuova probabilità che Rossi abbia la malattia sapendo che l'esame A ha dato un esito positivo. Sia D l'evento "Rossi ha la malattia" ed E l'evento "Rossi è positivo al test A". La probabilità cercata $P(D|E)$ si ottiene allora dalla formula

$$\begin{aligned}
 P(D|E) &= \frac{P(DE)}{P(E)} \\
 &= \frac{P(D)P(E|D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\
 &= \frac{(0.6)1}{1(0.6) + (0.3)(0.4)} \\
 &= 0.833
 \end{aligned}$$

Si osservi che si è calcolata la probabilità di un risultato positivo condizionando sul fatto che Rossi abbia o non abbia la malattia, e si è usata l'informazione che Rossi è diabetico per dire che la probabilità condizionata di un esito positivo al test sapendo che non ha la malattia, $P(E|D^c)$, è uguale a 0.3. Ora quindi il dottore è certo per più dell'80% che Rossi ha la malattia, e deve quindi prescrivere il ricovero. ■

Esempio 3f. A un certo stadio di una inchiesta investigativa l'ispettore è convinto al 60% della colpevolezza di un indagato. Supponiamo ora che l'ispettore acquisisca una nuova prova che indica che il colpevole ha una certa caratteristica (come l'essere mancino, calvo, o con capelli castani). Se il 20% della popolazione e il sospetto possiedono questa caratteristica, l'ispettore come modificherà la valutazione sulla colpevolezza dell'indagato?

Soluzione Indicando con G l'evento "l'indagato è il colpevole" e con C l'evento "l'indagato possiede la caratteristica del criminale" si ha

$$\begin{aligned}
 P(G|C) &= \frac{P(GC)}{P(C)} \\
 &= \frac{P(C|G)P(G)}{P(C|G)P(G) + P(C|G^c)P(G^c)} \\
 &= \frac{1(0.6)}{1(0.6) + (0.2)(0.4)} \\
 &\approx 0.882
 \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la probabilità che l'indagato abbia la caratteristica sapendo che è innocente sia pari a 0.2, la quota di popolazione che possiede la caratteristica. ■

Esempio 3g. Nel campionato del mondo di bridge che si è svolto a Buenos Aires nel maggio 1965, la famosa coppia inglese di bridgisti formata da Terrence Reese e Boris Schapiro è stata accusata di barare per aver utilizzato un sistema di segnali con le dita per indicare il numero di cuori tenuto dai giocatori. Reese e Schapiro respinsero l'accusa, e un processo fu infine istituito dalla lega inglese di bridge. Le udienze del processo assomigliavano a quelle di un processo legale con una accusa e una difesa, entrambi con la possibilità di chiamare e fare domande

incrociate ai testimoni. Nel corso delle udienze l'accusa esaminò le mani giocate da Reese e Schapiro, affermando che esse erano compatibili con l'ipotesi che fossero colpevoli di avere acquisito illegalmente le informazioni sul seme dei cuori. A questo punto la difesa osservò che le mani giocate erano anche totalmente compatibili con il loro modo di giocare. Ciò malgrado, l'accusa argomentò che, dato che il loro modo di giocare era compatibile con l'ipotesi di colpevolezza, ciò doveva essere contato come una prova a favore di questa ipotesi. Cosa pensate del ragionamento dell'accusa?

Soluzione Il problema è fondamentalmente quello di determinare come l'introduzione di una nuova prova (nell'esempio precedente, le mani giocate) modifica la probabilità di un'ipotesi particolare. Ora, se H indica una particolare ipotesi (come la colpevolezza di Reese e Schapiro), ed E è la nuova prova, allora

$$P(H|E) = \frac{P(HE)}{P(E)}$$

$$= \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]} \quad (3.2)$$

dove $P(H)$ è la nostra valutazione di verosimiglianza dell'ipotesi prima dell'acquisizione della nuova prova. Quest'ultimo corrobora l'ipotesi se esso rende l'ipotesi più probabile, cioè se $P(H|E) \geq P(H)$. Dalla Formula (3.2) si desume che ciò accadrà solo se

$$P(E|H) \geq P(E|H)P(H) + P(E|H^c)[1 - P(H)]$$

o, equivalentemente, quando

$$P(E|H) \geq P(E|H^c)$$

In altri termini, una nuova prova si può considerare a supporto di una particolare ipotesi solo se il suo realizzarsi è più probabile quando l'ipotesi è vera che quando l'ipotesi è falsa. Infatti, la nuova probabilità dell'ipotesi dipende dalla probabilità iniziale e dal quoziente di queste probabilità condizionate, dato che dalla Formula (3.2),

$$P(H|E) = \frac{P(H)}{P(H) + [1 - P(H)] \frac{P(E|H^c)}{P(E|H)}}$$

Pertanto, nel problema considerato, le giocate fatte si possono considerare a supporto dell'ipotesi di colpevolezza solo se queste giocate fossero state più probabili se la coppia barava anziché no. L'accusa, che non ha mai fatto questa affermazione, è quindi nel torto se asserisce che le giocate supportano l'ipotesi di colpevolezza. ■

Esempio 3h. I gemelli possono essere identici o diversi. Tecnicamente i gemelli identici sono chiamati monozigoti, quando l'ovulo è fecondato da un unico spermatozoo, per poi dividersi in due parti geneticamente uguali. In particolare, due gemelli identici condividono lo stesso insieme di geni. I gemelli diversi, detti eterozigoti, nascono quando la donna rilascia più di un ovulo durante l'ovulazione,

ognuno dei quali è fecondato da un diverso spermatozoo. Geneticamente due gemelli eterozigoti non si assomigliano più di due fratelli nati in tempi diversi. Nella Contea di Los Angeles in California alcuni scienziati hanno interpellato uno statistico per stimare la proporzione di gemelli identici tra tutti quelli nati nella Contea. Lo statistico inizialmente chiese ai vari ospedali della contea di registrare le nascite di gemelli, indicando di volta in volta se si trattava di gemelli identici o diversi. Gli ospedali tuttavia ribatterono che capire se due gemelli siano o no identici non era facile, e che ciò avrebbe richiesto degli studi complessi e costosi sul DNA che l'ospedale non si poteva permettere, nonché il permesso dei genitori stessi dei gemelli. Dopo qualche riflessione, lo statistico si limitò a chiedere agli ospedali di elencare le nascite di gemelli con accanto l'indicazione se fossero dello stesso sesso. Quando i dati mostrarono che approssimativamente il 64% dei gemelli avevano lo stesso sesso, lo statistico affermò che la proporzione di gemelli identici è approssimativamente del 28%. Spiegare il ragionamento fatto dallo statistico.

Soluzione Lo statistico ha senz'altro pensato che due gemelli identici sono necessariamente dello stesso sesso, mentre quelli diversi, avendo fra loro le stesse differenze genetiche di due fratelli qualunque, sono dello stesso sesso con probabilità $1/2$. Sia I l'evento che una coppia di gemelli sia identica, e sia SS l'evento che una coppia di gemelli sia dello stesso sesso. Condizionando a seconda che la coppia di gemelli sia identica o meno si ottiene

$$P(SS) = P(SS|I)P(I) + P(SS|I^c)P(I^c)$$

ovvero

$$P(SS) = 1 \times P(I) + \frac{1}{2} \times [1 - P(I)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(I)$$

che assieme a $P(SS) \approx 0.64$ porge il risultato

$$P(I) \approx 0.28 \quad \blacksquare$$

La modifica della probabilità di una ipotesi quando si introduce una nuova prova si può esprimere in modo compatto in funzione del rapporto a favore (*odd ratio* in inglese) di tale ipotesi, dove il concetto di rapporto a favore è definito come segue.

Definizione

Il rapporto a favore di un evento A è definito da

$$\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{P(A)}{1 - P(A)}$$

In altri termini, il rapporto a favore di un evento A esprime di quanto è più probabile che l'evento A si realizzi rispetto al fatto che l'evento non si realizzi. Ad esempio, se $P(A) = \frac{2}{3}$, allora $P(A) = 2P(A^c)$, così il rapporto a favore è uguale a 2. Se il rapporto a favore è uguale ad α , si dice comunemente che le possibilità sono " α a 1" a favore dell'ipotesi.

Consideriamo ora una ipotesi H che sia vera con probabilità $P(H)$ e supponiamo di introdurre una nuova prova E . Allora le probabilità condizionate, dato E , che H sia vera e che H non sia vera sono date da

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} \quad P(H^c|E) = \frac{P(E|H^c)P(H^c)}{P(E)}$$

Pertanto, il nuovo rapporto a favore a seguito dell'introduzione della prova E è dato da

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{P(H)}{P(H^c)} \frac{P(E|H)}{P(E|H^c)} \quad (3.3)$$

Il nuovo valore del rapporto a favore di H è il suo vecchio valore moltiplicato per il quoziente della probabilità condizionata della nuova prova supposto che H è vera con la probabilità condizionata della nuova prova supposto che H è falsa. Ciò conferma quanto si è visto nell'Esempio 3f: il rapporto a favore, e quindi la probabilità di H , aumenta se la nuova prova è più probabile quando H è vera che quando H è falsa. Analogamente, il rapporto a favore decresce quando la nuova prova è più probabile quando H è falso che quando H è vero.

Esempio 3i. Un'urna contiene due monete di tipo A e una moneta di tipo B . Quando si lancia una moneta di tipo A viene testa con probabilità $1/4$, mentre quando si lancia una moneta di tipo B viene testa con probabilità $3/4$. Supponiamo di scegliere a caso una moneta dall'urna e di lanciarla in seguito. Se viene testa, qual è la probabilità che la moneta sia di tipo A ?

Soluzione Sia A l'evento "si lancia una moneta di tipo A ", e $B = A^c$ l'evento che sia lanciata una moneta di tipo B . Vogliamo calcolare $P(A|\text{testa})$, dove per "testa" intendiamo l'evento che la moneta abbia dato testa nel lancio. Dalla equazione (3.3) si ha che

$$\begin{aligned} \frac{P(A|\text{testa})}{P(A^c|\text{testa})} &= \frac{P(A)}{P(B)} \frac{P(\text{testa}|A)}{P(\text{testa}|B)} \\ &= \frac{2/3}{1/3} \frac{1/4}{3/4} = 2/3 \end{aligned}$$

Pertanto il rapporto a favore di A è $2/3 : 1$ o, equivalentemente, la probabilità di aver lanciato la moneta di tipo A è pari a $2/5$. ■

La Formula (3.1) si può generalizzare come segue: supponiamo che F_1, F_2, \dots, F_n siano degli eventi a due a due disgiunti e di probabilità positiva, tali che

$$\bigcup_{i=1}^n F_i = S$$

Ciò significa che si realizza uno e uno solo degli eventi F_1, F_2, \dots, F_n . Scrivendo che

$$E = \bigcup_{i=1}^n EF_i$$

e osservando che gli eventi EF_i , $i = 1, \dots, n$ sono due a due disgiunti, si ottiene che

$$\begin{aligned} P(E) &= \sum_{i=1}^n P(EF_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i) \end{aligned} \quad (3.4)$$

La Formula (3.4), nota anche come *legge delle probabilità totali*, mostra quindi che, dati gli eventi F_1, F_2, \dots, F_n dei quali uno e uno solo si realizza, si può ottenere $P(E)$ calcolando dapprima le probabilità condizionate rispetto agli eventi F_i . La probabilità cercata $P(E)$ è allora la media ponderata delle $P(E|F_i)$, dove il peso di ciascun termine è uguale alla probabilità dell'evento rispetto al quale si condiziona.

Esempio 3j. Nell'Esempio 5j del Capitolo 2, abbiamo studiato la probabilità che, in un mazzo mescolato di 52 carte, la carta successiva al primo asso sia una carta determinata a priori; con un argomento combinatorio abbiamo concluso che tale probabilità è pari a $\frac{1}{52}$. Ritroviamo qui il risultato attraverso un ragionamento probabilistico basato sul condizionamento. Sia E l'evento che la carta che segue il primo asso del mazzo sia una data carta, diciamo la carta x . Per calcolare $P(E)$, ignoriamo la carta x e condizioniamo sulle possibili sequenze ordinate \mathbf{O} formate dalle rimanenti 51 carte del mazzo al quale è stata tolta la carta x : si ha

$$P(E) = \sum_{\mathbf{O}} P(E|\mathbf{O})P(\mathbf{O})$$

Ora, data una sequenza \mathbf{O} , vi sono 52 modi possibili per inserire la carta x in posizione $1, 2, \dots, 52$. Inoltre, ognuno dei 52! ordinamenti del mazzo iniziale è ugualmente possibile: di conseguenza, condizionando rispetto a \mathbf{O} , ognuno dei 52 ordinamenti possibili è ugualmente probabile ed è quindi $P(E|\mathbf{O}) = 1/52$, da cui $P(E) = 1/52$. ■

Siano come sopra F_1, F_2, \dots, F_n degli eventi a due a due disgiunti ed esaustivi (cioè che si realizzi esattamente uno di loro).

Supponiamo ora che E si sia realizzato e di voler determinare quale degli F_i si sia anch'esso realizzato. Allora la (3.4) permette di dedurre la proposizione seguente.

Proposizione 3.1

$$\begin{aligned} P(F_j|E) &= \frac{P(EF_j)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

¹La somma delle probabilità $P(\mathbf{O})$ al variare di \mathbf{O} è infatti uguale a 1 [N.d.T.].

La Formula (3.5) è nota come formula di Bayes, in onore del filosofo inglese Thomas Bayes. Se pensiamo agli eventi F_j come a delle possibili "ipotesi" relative a un fatto specifico, la formula di Bayes si può interpretare come il modo in cui le valutazioni iniziali su queste ipotesi fatte prima dell'esperimento [cioè le $P(F_j)$] si debbano modificare una volta che si conosca l'esito dell'esperimento.

Esempio 3k. Un aereo è scomparso e si presume che sia finito, con uguale probabilità, in una di 3 possibili zone. Sia $1 - \beta_i$ la probabilità di rintracciare l'aereo nella zona i , se l'aereo si trova effettivamente nella zona i , $i = 1, 2, 3$. (Le costanti β_i sono le probabilità di non recuperare l'aereo nella zona i ; esse dipendono generalmente dalle condizioni geografiche e ambientali.) Qual è la probabilità condizionata che l'aereo si trovi nella zona i , sapendo che le ricerche nella zona 1 hanno dato esito negativo, $i = 1, 2, 3$?

Soluzione Sia R_i , $i = 1, 2, 3$, l'evento "l'aereo si trova nella zona i " e sia E l'evento "la ricerca nella zona 1 ha dato esito negativo". Dalla formula di Bayes si ha

$$\begin{aligned} P(R_1|E) &= \frac{P(ER_1)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|R_1)P(R_1)}{\sum_{i=1}^3 P(E|R_i)P(R_i)} \\ &= \frac{(\beta_1)^{\frac{1}{3}}}{(\beta_1)^{\frac{1}{3}} + (1)^{\frac{1}{3}} + (1)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{\beta_1}{\beta_1 + 2} \end{aligned}$$

Per $j = 2, 3$,

$$\begin{aligned} P(R_j|E) &= \frac{P(E|R_j)P(R_j)}{P(E)} \\ &= \frac{(1)^{\frac{1}{3}}}{(\beta_1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{\beta_1 + 2} \quad j = 2, 3 \end{aligned}$$

Si noti che la probabilità aggiornata (cioè condizionata) che l'aereo si trovi nella zona j , sapendo che le ricerche nella zona 1 non lo hanno individuato, è maggiore della probabilità iniziale che l'aereo si trovasse nella zona j se $j \neq 1$ ed è inferiore della probabilità iniziale se $j = 1$; ciò conferma l'intuizione in quanto il fatto di non trovare l'aereo in una data regione dovrebbe far diminuire la probabilità condizionata che esso vi si trovi e aumentare le possibilità di trovarsi altrove. Inoltre, la probabilità condizionata che l'aereo si trovi nella regione 1,

sapendo che le ricerche nella stessa hanno dato esito negativo, è una funzione crescente della probabilità β_1 ; anche questo è conforme all'intuizione secondo la quale più è grande β_1 , più è ragionevole attribuire l'insuccesso della ricerca alla "sfortuna" che al fatto che l'aereo non ci sia. Analogamente, $P(R_j|E)$, $j \neq 1$ è una funzione decrescente di β_1 . ■

Il prossimo esempio è stato spesso utilizzato dagli studenti più spregiudicati dei corsi di probabilità per guadagnare soldi a scapito dei loro colleghi meno illuminati.

Esempio 3l. Si supponga di disporre di 3 carte identiche per la forma, ma che entrambe le facce della prima siano colorate di rosso, che entrambe le facce della seconda siano colorate di nero e che la terza carta abbia una faccia rossa e una faccia nera. Le 3 carte sono mescolate e inserite in un cappello, e una carta è scelta a caso e appoggiata sul tavolo. Se la parte superiore della carta scelta è rossa, qual è la probabilità che l'altra parte sia nera?

Soluzione Indichiamo con RR , NN e RN , rispettivamente, gli eventi riferiti alla carta scelta: "le due facce sono rosse", "le due facce sono nere" e "una faccia è nera, l'altra è rossa". Se R è l'evento "la faccia visibile della carta scelta è rossa", la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned} P(RN|R) &= \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{P(R|RN)P(RN)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RN)P(RN) + P(R|NN)P(NN)} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})}{(1)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{3}) + 0(\frac{1}{3})} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pertanto la risposta è $\frac{1}{3}$. Alcuni studenti ritengono che la risposta corretta sia $\frac{1}{2}$ pensando erroneamente che se appare una faccia rossa, si presentino due casi ugualmente possibili: che la carta sia rossa/rossa o che la carta sia rossa/nera. Il loro errore, tuttavia, consiste nel ritenere che questi due eventi siano ugualmente probabili. Infatti, se pensiamo che le carte abbiano due facce distinte, l'esperimento considerato ha 6 esiti ugualmente probabili - $R_1, R_2, N_1, N_2, R_3, N_3$ - dove l'esito è R_1 se è visibile la prima faccia della carta rossa/rossa, R_2 se è visibile la seconda faccia della carta rossa/rossa, R_3 se è visibile la faccia rossa della carta rossa/nera, e così via. Dato che la faccia coperta sarà nera solo se l'esito è R_3 , si ritrova che la probabilità condizionata di R_3 sapendo che si è realizzato R_1 o R_2 o R_3 , è evidentemente uguale a $\frac{1}{3}$. ■

Esempio 3m. Una coppia si è appena trasferita; in città si sa solo che hanno due figli. Qualcuno incontra la madre per strada a passeggio con uno dei due figli. Se il figlio è una femmina, qual è la probabilità che i figli siano entrambe femmine?

Soluzione Introduciamo innanzitutto gli eventi seguenti:

- F_1 : il primogenito è una femmina.
 F_2 : il secondogenito è una femmina.
 F : il bambino a passeggio con la mamma è una femmina.

Indichiamo anche con M_1, M_2, M gli eventi analoghi dove “femmina” è sostituito da “maschio”. Ora, la probabilità cercata è $P(F_1F_2|F)$, che è data da:

$$P(F_1F_2|F) = \frac{P(F_1F_2F)}{P(F)} \\ = \frac{P(F_1F_2)}{P(F)}$$

Inoltre

$$P(F) = P(F|F_1F_2)P(F_1F_2) + P(F|F_1M_2)P(F_1M_2) \\ + P(F|M_1F_2)P(M_1F_2) + P(F|M_1M_2)P(M_1M_2) \\ = P(F_1F_2) + P(F|F_1M_2)P(F_1M_2) + P(F|M_1F_2)P(M_1F_2)$$

dove per ottenere l'ultima formula si è usato il fatto che $P(F|F_1F_2) = 1$ e $P(F|M_1M_2) = 0$. Se ora facciamo l'ipotesi standard che i quattro casi possibili siano ugualmente probabili, otteniamo che

$$P(F_1F_2|F) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + P(F|F_1M_2)/4 + P(F|M_1F_2)/4} \\ = \frac{1}{1 + P(F|F_1M_2) + P(F|M_1F_2)}$$

La risposta dipende pertanto da quale ipotesi si decide di fare sulle probabilità condizionate che il figlio visto a passeggio con la madre sia una femmina dato l'evento F_1M_2 , e che il figlio visto a passeggio con la madre sia femmina dato l'evento F_2M_1 . Ad esempio se supponiamo, indipendentemente dal sesso dei figli, che il figlio a passeggio con la madre sia il primogenito con una probabilità uguale a p , allora

$$P(F|F_1M_2) = p = 1 - P(F|M_1F_2)$$

e ciò implica che

$$P(F_1F_2|F) = \frac{1}{2}$$

D'altro lato se, nel caso in cui i ragazzi hanno sessi diversi, supponiamo che la madre sceglierà di portare a passeggio la femmina con probabilità q , indipendente dall'ordine di nascita dei figli, si ha

$$P(F|F_1M_2) = P(F|M_1F_2) = q$$

e ciò conduce a

$$P(F_1F_2|F) = \frac{1}{1 + 2q}$$

Ad esempio, se avessimo $q = 1$, il che significa che la madre sceglierà sempre di uscire con una figlia, la probabilità condizionata cercata varrebbe $\frac{1}{3}$; ciò è in accordo con quanto trovato nell'Esempio 2b dato che vedere la madre con la figlia è equivalente ora al fatto che vi sia almeno una figlia.

Pertanto il problema così formulato non ha soluzione. Infatti, anche facendo l'ipotesi usuale di equiprobabilità dei generi, sono necessarie altre ipotesi prima di fornire la soluzione. Ciò accade in quanto lo spazio campionario dell'esperimento consiste dei vettori del tipo (s_1, s_2, i) , dove s_1 è il sesso del primogenito, s_2 è il sesso del secondogenito, e $i = 1$ o 2 a seconda che il figlio a passeggio con la madre sia, rispettivamente, il primogenito o il secondogenito. Ne segue che, per determinare le probabilità degli eventi dello spazio campionario, non è sufficiente fare solo delle ipotesi sul sesso dei figli, ma che occorre anche fare delle ipotesi sulle probabilità condizionate di quale figlio è con la madre dato il sesso dei figli. ■

Esempio 3n. Una scatola contiene varie lampadine di 3 tipi diversi. La probabilità che una lampadina di tipo 1 duri più di 1000 ore è pari a 0.7, mentre essa vale 0.4 per le lampadine di tipo 2 e 0.3 per quelle di tipo 3. Si supponga che il 20% delle lampadine della scatola sia di tipo 1, il 30% sia di tipo 2 e il restante 50% di tipo 3.

- (a) Qual è la probabilità che una lampadina scelta a caso duri più di 1000 ore?
 (b) Sapendo che la lampadina prescelta dura più di 1000 ore, qual è la probabilità condizionata che si tratti di una lampadina di tipo $j = 1, 2, 3$?

Soluzione (a) Sia A l'evento “la lampadina scelta dura più di 1000 ore”, e sia F_j l'evento: “è stata scelta una lampadina di tipo j ” con $j = 1, 2, 3$. Per calcolare $P(A)$ condizioniamo al tipo di lampadina, ottenendo così

$$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\ = (0.7)(0.2) + (0.4)(0.3) + (0.3)(0.5) = 0.41$$

Vi è quindi il 41% di possibilità che la lampadina scelta duri più di 1000 ore.

- (b) La probabilità cercata si ottiene tramite la formula di Bayes:

$$P(F_j|A) = \frac{P(AF_j)}{P(A)} \\ = \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{0.41}$$

Quindi,

$$P(F_1|A) = (0.7)(0.2)/0.41 = 14/41$$

$$P(F_2|A) = (0.4)(0.3)/0.41 = 12/41$$

$$P(F_3|A) = (0.3)(0.5)/0.41 = 15/41$$

Ad esempio, mentre la probabilità iniziale di scegliere una lampadina di tipo 1 è solo 0.2, l'informazione che la lampadina sia durata più di 1000 ore porta la probabilità di questo evento a $14/41 \approx 0.341$. ■

Esempio 30. Un assassino ha lasciato delle tracce del suo DNA sulla scena del delitto. La Polizia Scientifica è riuscita a identificare solo cinque marker; ora una persona innocente ha, indipendentemente², un DNA che coincide su quei cinque marker con probabilità pari a 10^{-5} . La Polizia ritiene che il colpevole sia uno tra il milione di residenti della regione. Diecimila di questi sono stati rilasciati dalla prigione negli ultimi dieci anni e una scheda del loro DNA è agli archivi. Prima di consultare gli archivi, il capo della Polizia ritiene che ciascuno dei diecimila ex detenuti abbia una probabilità pari ad α di essere l'autore del delitto in questione, mentre che questa valga β per le altre 990 000 persone; porremo $\alpha = c\beta$. (Cioè, la probabilità che un ex detenuto sia colpevole è pari a c volte quella che lo sia un'altra persona non ex detenuta.) Confrontando poi il DNA del colpevole con quelli dell'archivio degli ex detenuti, si vede che Pietro P. è l'unico il cui DNA è compatibile con quello dell'assassino. Supponendo che le valutazioni sulle probabilità α e β elaborate dal capo della Polizia siano corrette, qual è la probabilità che Pietro P. sia colpevole?

Soluzione Osserviamo innanzitutto che, dato che la somma delle probabilità deve fare 1, si ha

$$1 = 10\,000\alpha + 990\,000\beta = (10\,000c + 990\,000)\beta$$

Pertanto

$$\beta = \frac{1}{10\,000c + 990\,000}, \quad \alpha = \frac{c}{10\,000c + 990\,000}$$

Sia ora C l'evento "Pietro P. è colpevole", e U l'evento che Pietro P. sia l'unico sui diecimila schedati ad avere un DNA compatibile con l'assassino. Allora,

$$\begin{aligned} P(C|U) &= \frac{P(CU)}{P(U)} \\ &= \frac{P(C)P(U|C)}{P(U|C)P(C) + P(U|C^c)P(C^c)} \end{aligned}$$

Se Pietro P. è colpevole, egli sarà l'unico degli ex detenuti ad avere un DNA compatibile se nessuno degli altri dell'archivio è compatibile. Pertanto,

$$P(U|C) = (1 - 10^{-5})^{9999}$$

Definiamo ora l'evento V "tutti gli ex-detenuti sono innocenti". Abbiamo che

$$P(U|C^c) = \frac{P(UC^c)}{P(C^c)} = \frac{P(UVC^c)}{P(C^c)}$$

essendo UC^c contenuto in V . Ora

$$P(UVC^c) = P(C^c)P(V|C^c)P(U|VC^c)$$

e quindi

$$P(U|C^c) = P(V|C^c)P(U|VC^c)$$

Ora, sapendo che Pietro P. è innocente, la probabilità condizionata che tutti gli altri ex detenuti dell'archivio lo siano anch'essi è

$$\begin{aligned} P(V|C^c) &= \frac{P(V)}{P(C^c)} \\ &= \frac{1 - 10\,000\alpha}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Inoltre, la probabilità condizionata, data la loro innocenza, che l'unico ex detenuto che abbia un DNA compatibile con quello dell'assassino sia Pietro P., ovvero $P(U|VC^c)$, per l'ipotesi di indipendenza (condizionata)³ è pari a $10^{-5}(1 - 10^{-5})^{9999}$. Di conseguenza,

$$P(U|C^c) = 10^{-5} \left(\frac{1 - 10\,000\alpha}{1 - \alpha} \right) (1 - 10^{-5})^{9999}$$

Dato che $P(C) = \alpha$, si deduce allora che

$$P(C|U) = \frac{\alpha}{\alpha + 10^{-5}(1 - 10\,000\alpha)} = \frac{1}{0.9 + \frac{10^{-5}}{\alpha}}$$

Così se ad esempio il capo della Polizia è convinto inizialmente che la probabilità della colpevolezza di un ex detenuto sia 100 volte maggiore rispetto a quella di uno che non è stato in prigione (ovvero che $c = 100$), allora $\alpha = \frac{1}{19\,900}$ e

$$P(C|U) = \frac{1}{1.099} \approx 0.9099$$

Se invece il capo della Polizia è convinto inizialmente che il rapporto appropriato tra le probabilità sia $c = 10$, allora $\alpha = \frac{1}{109\,000}$ e

$$P(C|U) = \frac{1}{1.99} \approx 0.5025$$

Se invece il capo della Polizia ritiene inizialmente che il colpevole possa essere allo stesso modo un ex detenuto come un qualunque abitante della regione ($c = 1$) allora $\alpha = 10^{-6}$ e

$$P(C|U) = \frac{1}{10.9} \approx 0.0917$$

La probabilità cercata varia quindi da circa il 9% nel caso in cui il capo della Polizia ritenga inizialmente che tutti i cittadini abbiano la stessa probabilità di essere colpevoli, a circa il 91% quando egli ritenga che gli ex detenuti abbiano inizialmente 100 volte più possibilità della gente comune di essere colpevoli. ■

²La nozione di indipendenza verrà definita nella Sezione 3.4 [N.d.T.].

³Si utilizza qui la nozione di indipendenza condizionata, che verrà presentata nella Sezione 3.5 [N.d.T.].

3.4 EVENTI INDIPENDENTI

Gli esempi precedenti di questo capitolo mostrano che $P(E|F)$, la probabilità condizionata di E dato F , non è generalmente uguale a $P(E)$, la probabilità non condizionata di E . In altri termini, la conoscenza della realizzazione dell'evento F modifica in generale le possibilità del realizzarsi o meno di E . Nei casi particolari nei quali $P(E|F)$ coincide con $P(E)$, diciamo che E è indipendente da F . Cioè, E è indipendente da F se la conoscenza della realizzazione di F non modifica la probabilità che si realizzi E .

Se $P(F) > 0$, dalla formula $P(E|F) = P(EF)/P(F)$, si vede che E è indipendente da F se

$$P(EF) = P(E)P(F) \quad (4.1)$$

Ora la Formula (4.1) è simmetrica in E ed F , pertanto se $P(E) > 0$ e $P(F) > 0$, l'evento E è indipendente da F se F è indipendente da E e viceversa. Diamo la seguente definizione che include anche i casi in cui $P(E) = 0$ o $P(F) = 0$.

Definizione

Due eventi E ed F si dicono *indipendenti* se vale la Formula (4.1). Due eventi che non sono indipendenti si dicono *dipendenti*.

Esempio 4a. Si sceglie a caso una carta da un mazzo ordinario di 52 carte. Siano E l'evento "la carta scelta è un asso" e F l'evento "la carta scelta è di picche". Gli eventi E ed F sono indipendenti. Infatti $P(EF) = \frac{1}{52}$, mentre $P(E) = \frac{4}{52}$ e $P(F) = \frac{13}{52}$.

Esempio 4b. Si lanciano due monete, e si ritiene che i 4 possibili esiti dei lanci siano equiprobabili. Se E è l'evento "la prima moneta dà croce" ed F è l'evento "la seconda moneta dà testa", allora E ed F sono indipendenti, dato che $P(EF) = P(\{(C, T)\}) = \frac{1}{4}$; mentre $P(E) = P(\{(C, C), (C, T)\}) = \frac{1}{2}$ e $P(F) = P(\{(C, T), (T, T)\}) = \frac{1}{2}$.

Esempio 4c. Supponiamo di lanciare 2 dadi non truccati. Sia E_1 l'evento "la somma dei dadi è uguale a 6" e F l'evento "il primo dado dà 4". Allora

$$P(E_1F) = P(\{(4, 2)\}) = \frac{1}{36}$$

mentre

$$P(E_1)P(F) = \left(\frac{5}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{216}$$

Di conseguenza E_1 e F non sono indipendenti. Intuitivamente ciò è chiaro in quanto se ci interessa ottenere 6 (con due dadi), siamo relativamente fortunati se il primo dado dà 4 (o ciascuno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5), in quanto c'è la possibilità di fare 6. Invece, se il primo dado dà 6, non c'è nessuna possibilità di fare 6. In altri termini, la possibilità di fare 6 con i due dadi dipende dal numero ottenuto con il primo dado; pertanto E_1 e F non possono essere indipendenti.

Consideriamo ora l'evento E_2 "la somma dei dadi è uguale a 7". È vero che E_2 è indipendente da F ? La risposta è sì, dato che

$$P(E_2F) = P(\{(4, 3)\}) = \frac{1}{36}$$

mentre

$$P(E_2)P(F) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36}$$

Lasciamo al lettore la giustificazione intuitiva di questo fatto. ■

Esempio 4d. Indichiamo con E l'evento "il prossimo Presidente del Consiglio sarà del centro-destra" e con F l'evento "l'anno prossimo ci sarà un forte terremoto in Italia"; la maggior parte delle persone ritiene che E ed F siano indipendenti. Invece, vi sarebbero delle controversie nell'affermare che E è indipendente dall'evento "ci sarà un periodo di recessione nei due anni che seguono le elezioni". ■

Proviamo ora che se E è indipendente da F allora E è indipendente anche da F^c .

Proposizione 4.1

Siano E ed F due eventi indipendenti. Allora E ed F^c sono indipendenti.

Dimostrazione: Supponiamo che E ed F siano indipendenti. Dato che $E = EF \cup EF^c$, e che EF è disgiunto da EF^c , si ha che

$$\begin{aligned} P(E) &= P(EF) + P(EF^c) \\ &= P(E)P(F) + P(EF^c) \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} P(EF^c) &= P(E)[1 - P(F)] \\ &= P(E)P(F^c) \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ♦

Pertanto, se E è indipendente da F , la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F .

Supponiamo ora che E sia indipendente da F e da G . È vero che E è indipendente da FG ? La risposta, sorprendentemente, è no. Vediamolo con un esempio.

Esempio 4e. Si lanciano due dadi non truccati. Sia E l'evento "la somma dei dadi è 7". Sia F l'evento "il primo dado dà 4" e G l'evento "il secondo dado dà 3". Sappiamo dall'Esempio 4c che E è indipendente da F , e lo stesso tipo di ragionamento mostra che E e G sono indipendenti. È chiaro però che E non è indipendente da FG [essendo $P(E|FG) = 1$]. ■

Per definire l'indipendenza di tre eventi E, F, G sembra opportuno, ispirandoci dall'ultimo esempio, non limitarsi alla richiesta di indipendenza di tutte le $\binom{3}{2}$ coppie di eventi. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione

Tre eventi E, F, G si dicono indipendenti se

$$P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$$

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

$$P(EG) = P(E)P(G)$$

$$P(FG) = P(F)P(G)$$

Si osservi che se E, F, G sono indipendenti, allora E è indipendente da ogni evento si formi a partire da F e G . Ad esempio E è indipendente da $F \cup G$, essendo

$$\begin{aligned} P[E(F \cup G)] &= P(EF \cup EG) \\ &= P(EF) + P(EG) - P(EFG) \\ &= P(E)P(F) + P(E)P(G) - P(E)P(FG) \\ &= P(E)[P(F) + P(G) - P(FG)] \\ &= P(E)P(F \cup G) \end{aligned}$$

Ovviamente, la nozione di indipendenza si può estendere a più di 3 eventi. Gli eventi E_1, E_2, \dots, E_n si dicono indipendenti se per ogni sottoinsieme $E_{1'}, E_{2'}, \dots, E_{r'}$, $r \leq n$, di questi eventi si ha

$$P(E_{1'}E_{2'} \cdots E_{r'}) = P(E_{1'})P(E_{2'}) \cdots P(E_{r'})$$

Infine, diciamo che infiniti eventi sono indipendenti se ogni sottoinsieme finito di essi è formato da eventi indipendenti.

Accade talvolta che un esperimento di probabilità consista nell'effettuare una successione di sotto-esperimenti. Ad esempio, se l'esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una moneta, si può pensare a ogni lancio come a un sotto-esperimento. In molti casi è ragionevole supporre che gli esiti di ogni gruppo di sotto-esperimenti non abbia effetti sugli esiti degli altri sotto-esperimenti. In tal caso diciamo che i sotto-esperimenti sono indipendenti. Più precisamente, diciamo che i sotto-esperimenti sono indipendenti se ogni successione di eventi $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$, dove E_i è un generico evento la cui realizzazione dipende esclusivamente dall'esito dell' i -esimo sotto-esperimento, costituisce un insieme di eventi indipendenti.

Se tutti i sotto-esperimenti sono identici – cioè se ogni sotto-esperimento ha lo stesso spazio campionario e la stessa funzione di probabilità sui suoi eventi – i sotto-esperimenti vengono chiamati *prove*.

Esempio 4f. Si realizza una sequenza infinita di prove indipendenti. Ogni prova ha due esiti possibili: il successo con probabilità p o l'insuccesso con probabilità $1 - p$. Qual è la probabilità che

- vi sia almeno un successo nelle prime n prove;
- vi siano esattamente k successi nelle prime n prove;
- tutte le prove abbiano successo?

Soluzione Per determinare la probabilità di avere almeno un successo nelle prime n prove, è più semplice determinare prima la probabilità dell'evento complementare, cioè che non vi siano successi nelle prime n prove. Se indichiamo con E_i l'evento dell'insuccesso alla prova i -esima, la probabilità che non vi siano successi è, per l'indipendenza,

$$P(E_1E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_n) = (1 - p)^n$$

Pertanto la risposta ad (a) è $1 - (1 - p)^n$.

Per risolvere (b), consideriamo una sequenza particolare dei primi n esiti contenente k successi e $n - k$ insuccessi. Ognuna di queste sequenze si realizzerà, per l'ipotesi di indipendenza, con probabilità $p^k(1 - p)^{n-k}$. Dato che vi sono $\binom{n}{k}$ sequenze di questo tipo (vi sono $n!/k!(n - k)!$ permutazioni di k successi e $n - k$ insuccessi), la probabilità cercata in (b) è data da

$$P\{\text{esattamente } k \text{ successi}\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Per rispondere a (c), osserviamo che la probabilità che le prime n prove siano tutte dei successi è data, con le notazioni di (a), da

$$P(E_1^c E_2^c \cdots E_n^c) = p^n$$

Di conseguenza, dalla proprietà di continuità delle probabilità (Sezione 2.6), la probabilità cercata $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right)$ è data da

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c\right) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_n p^n = \begin{cases} 0 & \text{se } p < 1 \\ 1 & \text{se } p = 1 \end{cases} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 4g. Un sistema costituito da n componenti è detto sistema parallelo se esso funziona quando almeno uno dei suoi componenti funziona (si veda la Figura 3.2). In un tale sistema, il componente i , indipendente dagli altri componenti, funziona con probabilità $p_i, i = 1, \dots, n$. Qual è la probabilità che il sistema funzioni?

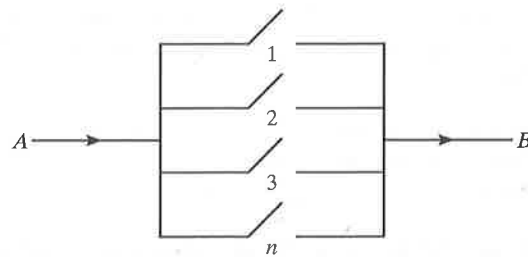


Figura 3.2 Il sistema parallelo funziona se la corrente passa da A a B.

Soluzione Sia A_i l'evento "il componente i funziona". Allora

$$\begin{aligned} P\{\text{il sistema funziona}\} &= 1 - P\{\text{il sistema non funziona}\} \\ &= 1 - P\{\text{nessun componente funziona}\} \\ &= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \quad \text{per l'indipendenza} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 4h. Si effettuano delle prove indipendenti, che consistono nel lanciare una coppia di dadi non truccati. L'esito che ci interessa in ogni prova è la somma dei dadi. Qual è la probabilità che l'esito uguale a 5 preceda l'esito uguale a 7?

Soluzione Se E_n è l'evento "i numeri 5 e 7 non appaiono nelle prime $n - 1$ prove e il 5 appare alla n -esima prova, la probabilità cercata è

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Dato che, in ogni singola prova $P\{\text{fare 5}\} = \frac{4}{36}$ e $P\{\text{fare 7}\} = \frac{6}{36}$, otteniamo, per l'indipendenza delle prove, che

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Il risultato si poteva ottenere anche tramite le probabilità condizionate. Se E è l'evento "il 5 esce prima del 7", si può calcolare la probabilità cercata, $P(E)$, condizionandola sull'esito della prima prova, come segue: siano F l'evento "l'esito della prima prova è 5", G l'evento "l'esito della prima prova è 7" e sia H l'evento "l'esito della prima prova non è né 5 né 7". Condizionando su questi eventi si ottiene

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|G)P(G) + P(E|H)P(H)$$

Ora

$$\begin{aligned} P(E|F) &= 1 \\ P(E|G) &= 0 \\ P(E|H) &= P(E) \end{aligned}$$

Le prime due uguaglianze sono ovvie. La terza segue in quanto, se l'esito della prima prova non è né 5 né 7, la situazione a quel punto è uguale a quella di partenza; lo sperimentatore continuerà a lanciare un paio di dadi non truccati finché esce il 5 o il 7. Inoltre, le prove sono indipendenti; di conseguenza l'esito della prima prova non influenza i successivi lanci dei dadi. Dato che $P(F) = \frac{4}{36}$, $P(G) = \frac{6}{36}$ e $P(H) = \frac{26}{36}$, si deduce che

$$P(E) = \frac{1}{9} + P(E)\frac{13}{18}$$

oppure

$$P(E) = \frac{2}{5}$$

Il lettore noterà che la risposta si poteva intuire con facilità. Infatti, dato che il 5 esce con probabilità $\frac{4}{36}$ e il 7 esce con probabilità $\frac{6}{36}$, sembra plausibile che le possibilità che il 5 esca prima del 7 siano 4 contro 6. È quindi ragionevole pensare che la probabilità cercata sia uguale a $\frac{4}{10}$, confermando il ragionamento rigoroso fatto sopra.

Lo stesso ragionamento mostra che se E ed F sono due eventi disgiunti di un esperimento, allora, quando si effettuano delle prove ripetute di questo esperimento, la probabilità che l'evento E si realizzi prima di F è data da

$$\frac{P(E)}{P(E) + P(F)}$$

Esempio 4i. Ci sono sul mercato n tipi di figurine; ognuna di queste è indipendentemente di tipo i con probabilità p_i , $\sum_i p_i = 1$. Si supponga di acquistarne k . Sia A_i , l'evento che vi sia almeno una figurina di tipo i tra quelle acquistate; se $i \neq j$, determinare

- $P(A_i)$;
- $P(A_i \cup A_j)$;
- $P(A_i | A_j)$.

Soluzione

$$\begin{aligned} P(A_i) &= 1 - P(A_i^c) \\ &= 1 - P\{\text{nessuna figurina è di tipo } i\} \\ &= 1 - (1 - p_i)^k \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che ogni figurina non è, indipendentemente, di tipo i con probabilità $1 - p_i$. Analogamente,

$$\begin{aligned} P(A_i \cup A_j) &= 1 - P((A_i \cup A_j)^c) \\ &= 1 - P\{\text{nessuna figurina è di tipo } i \text{ o di tipo } j\} \\ &= 1 - (1 - p_i - p_j)^k \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che ogni figurina non è, indipendentemente, né di tipo i né di tipo j con probabilità $1 - p_i - p_j$.

Per determinare $P(A_i|A_j)$, usiamo l'identità

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i A_j)$$

che, assieme a quanto trovato in (a) e (b), fornisce

$$\begin{aligned} P(A_i A_j) &= 1 - (1 - p_i)^k + 1 - (1 - p_j)^k - [1 - (1 - p_i - p_j)^k] \\ &= 1 - (1 - p_i)^k - (1 - p_j)^k + (1 - p_i - p_j)^k \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$P(A_i|A_j) = \frac{P(A_i A_j)}{P(A_j)} = \frac{1 - (1 - p_i)^k - (1 - p_j)^k + (1 - p_i - p_j)^k}{1 - (1 - p_j)^k} \quad \blacksquare$$

L'esempio che segue occupa un posto d'onore nella storia della teoria delle probabilità. Si tratta del famoso *problema dei punti*. In termini generali, il problema è il seguente: due giocatori mettono una posta in gioco, che andrà al vincitore del gioco. Una interruzione li obbliga a fermarsi prima che uno abbia vinto; ciascuno di essi ha in quel momento una specie di "punteggio parziale". Come va divisa la posta in gioco?

Il problema è stato posto nel 1654 al matematico francese Blaise Pascal dal Cavaliere di Méré, che era all'epoca un giocatore professionista. Analizzando il problema, Pascal introdusse l'idea che la proporzione di premio spettante ai giocatori dovesse dipendere dalle loro rispettive probabilità di vincere se il gioco continuasse. Pascal esaminò alcuni casi particolari e, soprattutto, iniziò una corrispondenza con il famoso matematico francese Pierre De Fermat. Lo scambio di lettere non portò solo alla soluzione completa del problema dei punti, ma gettò le basi per risolvere molti altri problemi legati ai giochi d'azzardo. Questa famosa corrispondenza tra due dei migliori matematici dell'epoca, considerata da alcuni come la nascita della teoria della probabilità, stimolò l'interesse nelle probabilità tra i matematici europei. Ad esempio, poco tempo dopo, il giovane matematico olandese Huygens venne a Parigi per discutere questi problemi e le loro soluzioni; l'interesse e l'attività in questo nuovo campo crebbe rapidamente.

Esempio 4j. Il problema dei punti Si realizzano delle prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p e l'insuccesso ha probabilità $1 - p$. Qual è la probabilità che n successi si realizzino prima di m insuccessi? Pensando a due giocatori A e B di un gioco nel quale A vince 1 punto in caso di successo e

B vince un punto in caso di insuccesso, la probabilità cercata è uguale alla probabilità che A vinca da una posizione del gioco nella quale ad A manchino n punti per vincere e a B manchino m punti per vincere.

Soluzione Presentiamo due soluzioni. La prima è dovuta a Pascal, la seconda a Fermat.

Indichiamo con $P_{n,m}$ la probabilità che n successi si realizzino prima di m insuccessi. Condizionando sull'esito della prima prova otteniamo

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1-p)P_{n,m-1} \quad n \geq 1, m \geq 1$$

(Perché? Convincersi della validità della formula.) Utilizzando le ovvie condizioni iniziali $P_{n,0} = 0$, $P_{0,m} = 1$, le equazioni determinano $P_{n,m}$. Al posto di proseguire in dettagli noiosi, consideriamo invece la soluzione di Fermat.

Fermat osservò che affinché si realizzino n successi prima di m insuccessi, è necessario e sufficiente che vi siano almeno n successi nelle prime $m + n - 1$ prove. (Se anche il gioco finisce prima che $m + n - 1$ prove siano effettuate, possiamo immaginare che le altre prove necessarie siano effettuate.) Infatti, se vi sono almeno n successi nelle prime $m + n - 1$ prove, vi possono essere al più $m - 1$ insuccessi in quelle stesse $m + n - 1$ prove; vi sono così n successi prima che si realizzino m insuccessi. Inoltre, se vi fossero meno di n successi nelle prime $m + n - 1$ prove, vi sarebbero almeno m insuccessi nello stesso numero di prove; in tal caso n successi non si realizzano prima di m insuccessi.

Ora, dato che la probabilità di ottenere k successi in $m + n - 1$ prove è, come si è visto nell'Esempio 4f, pari a $\binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k}$, si deduce allora che la probabilità che vi siano n successi prima di m insuccessi è data da

$$P_{n,m} = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k (1-p)^{m+n-1-k} \quad \blacksquare$$

Esempio 4k. Scelta del protocollo di gara in un gioco con azioni costituite da un servizio e scambi. Consideriamo una partita sportiva costituita da azioni tra due giocatori A e B . Ogni azione inizia con un servizio (o battuta) da parte di uno dei giocatori e continua finché uno dei giocatori non vince l'azione. Il vincitore dell'azione riceve un punto, e la partita si ferma quando uno dei giocatori ha totalizzato n punti; in tal caso quel giocatore viene dichiarato il vincitore della partita. Supponiamo che ogni volta che l'azione inizia con la battuta di A allora A vince l'azione con probabilità p_A e B la vince quindi con probabilità $q_A = 1 - p_A$, mentre se l'azione inizia con la battuta di B allora essa è vinta da A con probabilità p_B e da B con probabilità $q_B = 1 - p_B$. Ci sono due protocolli di gioco possibili da considerare: "batte il vincitore", cioè è il vincitore dell'azione che fa il servizio nell'azione successiva, o "battute alterne", quando il servizio viene alternato da azione in azione, in modo che non vi siano due azioni consecutive nelle quali lo stesso giocatore effettui il servizio. Così, ad esempio, se $n = 3$, allora i servizi consecutivi nel protocollo "batte il vincitore" sarebbero A, B, A, A se A vince il primo punto, B il successivo, e A vince gli ultimi due. Invece, la

sequenza di servizi nel protocollo “battute alterne” è sempre A, B, A, B, A, \dots finché la partita non viene vinta. Quale protocollo conviene al giocatore A ?

Soluzione Sorprendentemente, si ricava che non c'è differenza, cioè la probabilità che il giocatore A vinca la partita è la stessa in entrambi i protocolli. Per mostrarlo conviene supporre che i giocatori continuino a giocare finché sono state completate $2n - 1$ azioni. Il primo giocatore che vince n azioni sarà in tal caso quello che ha vinto almeno n delle $2n - 1$ azioni. Osserviamo innanzitutto che se viene usato il protocollo dei servizi alternati, il giocatore A effettuerà in tal caso il servizio esattamente n volte e il giocatore B effettuerà il servizio esattamente $n - 1$ volte, tra le $2n - 1$ azioni.

Consideriamo ora il protocollo nel quale il vincitore effettua la battuta successiva supponendo ancora che i giocatori continuino a giocare finché non vengono effettuate $2n - 1$ azioni. Dato che non importa chi effettua la battuta nelle azioni successive dopo che è stato determinato il vincitore della partita, supponiamo che nel punto in cui la partita è stata assegnata (perché uno dei giocatori ha appena vinto n punti), le azioni rimanenti (se ce ne sono) siano tutte battute dal giocatore che di fatto ha già perso la partita. Si noti che questo protocollo di servizio modificato non altera il fatto che il vincitore della partita sarà ancora colui che avrà vinto almeno n delle $2n - 1$ azioni. Affermiamo che in questo protocollo di servizio modificato, A effettuerà sempre la battuta n volte e B effettuerà sempre la battuta $(n - 1)$ volte. Distinguiamo due casi per mostrare questa affermazione.

Caso I: A vince la partita.

Dato che A è il primo battitore, si ha che A effettuerà la seconda battuta subito dopo aver preso il suo primo punto e la terza battuta dopo aver preso il secondo punto: in particolare A effettuerà la sua n -esima battuta subito dopo aver preso l'($n - 1$)-esimo punto. Ma questo sarà l'ultimo servizio di A prima che il risultato della partita sia deciso. Ciò accade perché o A vince il punto, e in tal caso conquisterà n punti e rimarrà con quel punteggio, oppure lo vince B , e in questo caso il servizio passa a B finché A non vince l' n -esimo punto. Pertanto, supponendo che A vinca la partita, si ha che A avrà battuto per un totale di n volte nel momento in cui l'esito della partita viene determinato. Dato che, a causa del protocollo di servizio modificato, A non effettuerà altre battute, segue che in questo caso A effettuerà esattamente n battute.

Caso II: B vince la partita.

Dato che A effettua il primo servizio, la prima battuta di B viene subito dopo il primo punto di B ; la seconda battuta di B avviene subito dopo il secondo punto di B ; e, in particolare, l'($n - 1$)-esima battuta di B viene effettuata immediatamente dopo l'($n - 1$)-esimo punto di B . Ma questa sarà l'ultima battuta di B prima che l'esito della partita sia determinato perché o B vince quell'azione e acquisisce n punti, o B perde quel punto e così il servizio passa ad A finché B non vince l' n -esimo punto. Pertanto, supponendo che B vinca la partita, si ha che B avrà effettuato un totale di $n - 1$ battute al momento nel quale l'esito della partita è deciso. Dato che, nel protocollo di servizio modificato, B non effettuerà altre battute, segue in questo caso che B farà esattamente $(n - 1)$ battute, e, dal momento che ci sono in tutto $2n - 1$ azioni nel gioco, che A effettuerà il servizio esattamente n volte.

Pertanto vediamo che, sotto entrambi i protocolli, il giocatore A avrà effettuato n battute e B ne avrà effettuate $n - 1$ e che il vincitore della partita sarà colui il quale avrà vinto almeno n punti. Dato che A vince ogni azione che batte con probabilità p_A e vince ogni azione battuta da B con probabilità p_B , segue che la probabilità che A sia il vincitore della partita è, sotto entrambi i protocolli, uguale alla probabilità che vi siano almeno n successi in $2n - 1$ prove indipendenti nelle quali n di queste sono costituite da successi ottenuti con probabilità p_A e le altre $n - 1$ prove sono costituite da successi ottenuti con probabilità p_B . Di conseguenza la probabilità di vincita per entrambi i protocolli è la stessa. ■

I due esempi successivi trattano problemi di giochi, il primo dei quali si può analizzare in modo sorprendentemente elegante⁴.

Esempio 4I. Supponiamo che inizialmente vi siano r giocatori, e che il giocatore i abbia n_i euro, $n_i > 0$, $i = 1, \dots, r$. Ad ogni tappa, si scelgono due giocatori per effettuare una partita, nella quale il vincitore riceve 1 euro da chi perde. I giocatori il cui patrimonio scende a 0 sono eliminati, e ciò finché un singolo giocatore acquisisce tutti gli $n = \sum_{i=1}^r n_i$ euro; in tal caso egli è il vincitore del gioco. Supponendo che i risultati delle partite successive siano indipendenti, e che in ogni partita possa vincere in ugual modo uno dei due giocatori, determinare P_i , la probabilità che il giocatore i sia il vincitore.

Soluzione Per cominciare, supponiamo che vi siano n giocatori ognuno dei quali ha inizialmente un euro. Consideriamo il giocatore i . In ogni partita che affronta, il giocatore avrà la stessa probabilità di perdere o di vincere un euro, l'esito di una partita essendo indipendente dall'esito di un'altra. Inoltre, il giocatore continuerà a giocare finché il suo patrimonio sarà pari a euro 0 o a euro n . Dato che ciò accade per tutti gli n giocatori, segue che ogni giocatore ha la stessa probabilità di essere il vincitore, sicché ogni giocatore ha la probabilità $1/n$ di essere il vincitore. Ora supponiamo che questi n giocatori siano divisi in r squadre e che ogni squadra i contenga n_i giocatori, $n_i > 0$, $i = 1, \dots, r$. Allora la probabilità che il vincitore sia un membro della squadra i è n_i/n . Ma dato che

- la squadra i è inizialmente dotata di un patrimonio pari a n_i euro, $i = 1, \dots, r$, e
- ogni partita giocata da membri di diverse squadre può essere ugualmente vinta da entrambi i giocatori – ciò si traduce nell'aumento di euro 1 nel patrimonio della squadra che vince e nella perdita di euro 1 nel patrimonio della squadra che perde,

è facile vedere che la probabilità che cerchiamo è esattamente quella che vinca la squadra i . Di conseguenza $P_i = n_i/n$. È interessante osservare come il nostro ragionamento mostra che tale risultato non dipende dalla scelta dei giocatori ad ogni tappa del gioco. ■

⁴Il lettore può omettere il resto della sezione in prima lettura.

Nel problema della rovina del giocatore, vi sono solo due giocatori, ma non si suppone che essi abbiano le stesse possibilità di successo.

Esempio 4m. Il problema della rovina del giocatore. Due giocatori, A e B , scommettono sugli esiti dei lanci successivi di una moneta. A ogni lancio, se viene testa, A riceve 1 euro da B , mentre se viene croce, A paga 1 euro a B . Essi continuano a lanciare la moneta finché uno di essi resta senza soldi. Supponendo che i lanci della moneta siano indipendenti e che, a ogni lancio, esca testa con probabilità p , qual è la probabilità che A vinca tutti i soldi se all'inizio egli dispone di i euro e B dispone di $N - i$ euro?

Soluzione Sia E l'evento " A vince tutti i soldi cominciando da i euro e B da $N - i$ euro", e per mettere in evidenza la dipendenza dal capitale iniziale di A , poniamo $P_i = P(E)$. Otteniamo il valore di $P(E)$ condizionando sull'esito del primo lancio come segue: sia T l'evento "esce testa al primo lancio"; si ha allora

$$\begin{aligned} P_i &= P(E) = P(E|T)P(T) + P(E|T^c)P(T^c) \\ &= pP(E|T) + (1-p)P(E|T^c) \end{aligned}$$

Ora, se al primo lancio esce testa, la situazione dopo la prima scommessa è che A ha $i + 1$ euro e B ne ha $N - (i + 1)$. Dato che i lanci successivi sono indipendenti, e che in ciascuno esce testa con probabilità p , si ha, dal punto di vista di A , che la probabilità di A di vincere tutta la somma è esattamente quella che vi sarebbe iniziando il gioco con un capitale iniziale di $i + 1$ euro. Di conseguenza,

$$P(E|T) = P_{i+1}$$

e, analogamente,

$$P(E|T^c) = P_{i-1}$$

Di conseguenza, ponendo $q = 1 - p$, si ottiene

$$P_i = pP_{i+1} + qP_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.2)$$

Risolveremo le (4.2) utilizzando le ovvie condizioni al contorno $P_0 = 0$ e $P_N = 1$. Le uguaglianze (4.2) equivalgono a⁵

$$pP_i + qP_i = pP_{i+1} + qP_{i-1}$$

o

$$P_{i+1} - P_i = \frac{q}{p}(P_i - P_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (4.3)$$

Di conseguenza, dato che $P_0 = 0$, si ottiene dalla Equazione (4.3):

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \frac{q}{p}(P_1 - P_0) = \frac{q}{p}P_1 \\ P_3 - P_2 &= \frac{q}{p}(P_2 - P_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 P_1 \\ &\vdots \\ P_i - P_{i-1} &= \frac{q}{p}(P_{i-1} - P_{i-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} P_1 \\ &\vdots \\ P_N - P_{N-1} &= \frac{q}{p}(P_{N-1} - P_{N-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} P_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sommando i primi $i - 1$ termini della Equazione (4.4) si ottiene

$$P_i - P_1 = P_1 \left[\left(\frac{q}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} \right]$$

o

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)} P_1 & \text{se } \frac{q}{p} \neq 1 \\ iP_1 & \text{se } \frac{q}{p} = 1 \end{cases}$$

Usando ora il fatto che $P_N = 1$, si ottiene

$$P_1 = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^N}{1 - (q/p)} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{N} & \text{se } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui

$$P_i = \begin{cases} \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} & \text{se } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & \text{se } p = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Sia Q_i la probabilità che B finisca il gioco intascando tutti i soldi quando A comincia con i e B con $N - i$. Allora, per simmetria con la situazione appena descritta, è sufficiente sostituire p con q per vedere che

$$Q_i = \begin{cases} \frac{1 - (p/q)^{N-i}}{1 - (p/q)^N} & \text{se } q \neq \frac{1}{2} \\ \frac{N - i}{N} & \text{se } q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

⁵ Si tratta di una relazione di ricorrenza lineare di ordine 2, che si risolve anche con le tecniche standard della Matematica Discreta: si determina la soluzione generale, dipendente da 2 costanti arbitrarie, e si impongono poi le condizioni al contorno per determinare le 2 costanti arbitrarie [N.d.T.]

Inoltre dato che $q = \frac{1}{2}$ equivale a $p = \frac{1}{2}$, si ha, per $q \neq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} P_i + Q_i &= \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} + \frac{1 - (p/q)^{N-i}}{1 - (p/q)^N} \\ &= \frac{p^N - p^N(q/p)^i}{p^N - q^N} + \frac{q^N - q^N(p/q)^{N-i}}{q^N - p^N} \\ &= \frac{p^N - p^{N-i}q^i - q^N + q^i p^{N-i}}{p^N - q^N} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Siccome il risultato vale anche per $p = q = \frac{1}{2}$, vediamo che

$$P_i + Q_i = 1$$

In altri termini, questa equazione prova che, con probabilità 1, A o B termina il gioco con tutto il denaro; equivalentemente la probabilità che il gioco continui indefinitamente con il capitale di A compreso tra 1 e $N - 1$ è uguale a zero. (Il lettore deve stare all'erta perché, a priori, vi sono tre possibili esiti di questo gioco d'azzardo, non due. Possono vincere A o B , oppure il gioco si può prolungare indefinitamente. Abbiamo appena mostrato che questo ultimo evento ha probabilità 0.)

Come illustrazione numerica di quanto appena visto, se A inizia con 5 euro e B con 10 euro, allora la probabilità che A vinca è uguale a $\frac{1}{3}$ se p è $\frac{1}{2}$, mentre sale a

$$\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{15}} \approx 0.87$$

se p è uguale a 0.6.

Un caso particolare del problema della rovina del giocatore, anche noto come problema della *durata del gioco*, è stata proposta al matematico olandese Christian Huygens dal francese Pierre De Fermat nel 1657. La versione proposta, risolta da Huygens, era che A e B avessero 12 monete. Essi giocano in un gioco con tre dadi come segue. Appena viene 11 (da chiunque, non importa chi lancia i dadi), A dà una moneta a B . Appena viene 14, B dà una moneta ad A . La persona che vince per prima tutte le monete vince il gioco. Dato che $P\{\text{esce l'11}\} = \frac{27}{216}$ e $P\{\text{esce il 14}\} = \frac{15}{216}$, si vede dall'Esempio 4k che per A questo è proprio il problema della rovina del giocatore con $p = \frac{15}{42}$, $i = 12$, $N = 24$. La forma generale del problema della rovina del giocatore è stata risolta dal matematico James Bernoulli e pubblicato 8 anni dopo la sua morte nel 1713.

Illustriamo ora un'applicazione del problema della rovina del giocatore ai test per i farmaci. Supponiamo che due nuovi farmaci siano formulati per trattare una data malattia. Il farmaco i ha un tasso di guarigione P_i , $i = 1, 2$, nel senso che ogni paziente curato con il farmaco i guarirà con probabilità P_i . Tuttavia questi tassi di guarigione sono sconosciuti, e ci interessiamo ora a un metodo per decidere se $P_1 > P_2$ o $P_2 > P_1$. Per determinare l'alternativa valida, si considera il seguente test: si trattano successivamente delle coppie di pazienti, in ognuna delle quali a un paziente viene somministrato il farmaco 1 e all'altro il farmaco 2. Si registrano i risultati di ogni coppia, il test termina quando il

numero totale di pazienti guariti che hanno assunto uno dei due farmaci supera di un valore prefissato il numero totale di pazienti guariti che hanno assunto l'altro farmaco. Formalmente, sia

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente della coppia } j \text{ che ha assunto il farmaco 1 è guarito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il paziente della coppia } j \text{ che ha assunto il farmaco 2 è guarito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Fissato un determinato numero positivo M , il test termina con la coppia N , dove N è il primo intero n tale che

$$X_1 + \dots + X_n - (Y_1 + \dots + Y_n) = M$$

o

$$X_1 + \dots + X_n - (Y_1 + \dots + Y_n) = -M$$

Nel primo caso diremo che $P_1 > P_2$, mentre nel secondo che $P_2 > P_1$.

Per accertarsi che quanto effettuato rappresenti un buon test, si determina la probabilità che esso conduca alla decisione errata. Cioè, dati P_1 e P_2 , con $P_1 > P_2$, qual è la probabilità che il test concluda erroneamente che $P_2 > P_1$? Per determinare tale probabilità, si osservi che dopo aver controllato gli esiti di ogni coppia, la differenza totale del numero di pazienti guariti con il farmaco 1 con il numero di pazienti guariti con il farmaco 2 salirà di 1 con probabilità $P_1(1 - P_2)$ - dato che questa è la probabilità che il primo farmaco guarisca mentre il secondo no - o scenderà di 1 con probabilità $(1 - P_1)P_2$ o resterà invariato con probabilità $P_1P_2 + (1 - P_1)(1 - P_2)$. Pertanto, se consideriamo solo le coppie nelle quali cambia la differenza descritta sopra, si ha che questa salirà di 1 con probabilità

$$\begin{aligned} P &= P\{\text{su di 1} | \text{su di 1 o giù di 1}\} \\ &= \frac{P_1(1 - P_2)}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2} \end{aligned}$$

e scenderà di 1 con probabilità

$$1 - P = \frac{P_2(1 - P_1)}{P_1(1 - P_2) + (1 - P_1)P_2}$$

Quindi, la probabilità che il test asserisca che $P_2 \geq P_1$ è uguale alla probabilità che un giocatore che vinca ogni scommessa (1 euro a favore) con probabilità P , perda M euro prima di guadagnarne M . Ora, la Formula (4.5) con $i = M$, $N = 2M$, mostra che tale probabilità è data da

$$\begin{aligned} &P\{\text{il test conduce a } P_2 > P_1\} \\ &= 1 - \frac{1 - \left(\frac{1 - P}{P}\right)^M}{1 - \left(\frac{1 - P}{P}\right)^{2M}} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{1-P}{P}\right)^M}$$

$$= \frac{1}{1 + \gamma^M}$$

dove

$$\gamma = \frac{P}{1-P} = \frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

Ad esempio, se $P_1 = 0.6$ e $P_2 = 0.4$, allora la probabilità di prendere una decisione non corretta è pari a 0.17 se $M = 5$ e si riduce a 0.0003 se $M = 10$. ■

Supponiamo di disporre di un dato insieme di oggetti e di voler determinare se almeno un membro di questo insieme gode di una certa proprietà. Possiamo affrontare la questione in modo probabilistico scegliendo a caso un elemento dell'insieme in modo tale che ogni elemento abbia una probabilità positiva di essere scelto. Si può allora rispondere alla domanda iniziale considerando la probabilità che l'elemento scelto a caso possieda la proprietà voluta. Se tale probabilità è positiva, abbiamo provato che almeno un elemento dell'insieme ha la proprietà richiesta, mentre se è zero, nessuno di essi ce l'ha.

L'ultimo esempio di questa sezione illustra questa tecnica.

Esempio 4n. Un grafo completo con n vertici è un insieme di n punti del piano (chiamati vertici) e di $\binom{n}{2}$ linee (chiamate lati) che connettono ogni paio di vertici. Il grafo completo con 3 vertici è mostrato in Figura 3.3. Supponiamo che si debba colorare ogni lato di un grafo completo di rosso o di blu. Dato un intero k , è interessante sapere se si possono colorare i lati del grafo in modo tale che nessun insieme di k vertici abbia tutti i $\binom{k}{2}$ lati che li connettono fra di loro dello stesso colore. Si può provare, con un argomento probabilistico, che se n non è troppo grande, allora la risposta è affermativa.

L'argomento è il seguente. Supponiamo che ogni lato sia, indipendentemente, colorato di rosso o di blu con uguale probabilità pari a $\frac{1}{2}$. Numeriamo gli $\binom{n}{k}$ insiemi di k vertici e definiamo gli eventi $E_i, i = 1, \dots, \binom{n}{k}$ come segue:

$E_i = \{ \text{tutti i lati che connettono i } k \text{ vertici dell'insieme } i\text{-esimo sono dello stesso colore} \}$

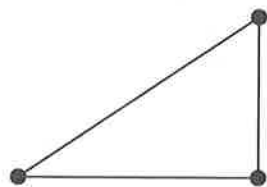


Figura 3.3

Ora, dato che ognuno dei $\binom{k}{2}$ lati che connettono un insieme di k vertici è colorato di rosso o di blu con uguale probabilità, segue che la probabilità che essi siano tutti dello stesso colore è:

$$P(E_i) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2}$$

Di conseguenza, dato che

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \sum_i P(E_i) \quad (\text{disuguaglianza di Boole})$$

si ottiene che $P\left(\bigcup_i E_i\right)$, la probabilità che vi sia un insieme di k vertici i cui lati che li connettono sono dello stesso colore, soddisfa la stima

$$P\left(\bigcup_i E_i\right) \leq \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2-1}$$

Pertanto, se

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k(k-1)/2-1} < 1$$

o, equivalentemente, se

$$\binom{n}{k} < 2^{k(k-1)/2-1}$$

allora la probabilità che almeno uno degli insiemi di k vertici abbia tutti i lati che li connettono dello stesso colore è inferiore a 1. Di conseguenza, sotto la condizione precedente su n e k , vi è una probabilità positiva che nessun insieme di k vertici abbia i lati che li connettono dello stesso colore. In tal caso vi è necessariamente almeno un modo per colorare i lati del grafo in modo tale che nessun insieme di k vertici abbia i lati che li connettono dello stesso colore. ■

OSSERVAZIONI. (a) Si noti che mentre l'argomento precedente stabilisce una condizione su n e k che garantisce l'esistenza di una colorazione dei lati che soddisfa la proprietà voluta, esso non dà nessuna informazione su come si ottenga una tale colorazione.

(b) Il metodo che consiste nell'introdurre le probabilità in un problema la cui formulazione è prettamente deterministica è stato chiamato il *metodo probabilistico*.⁶ Altri esempi di questo metodo sono forniti nell'Esercizio teorico 24 e negli Esempi 2t e 2u del Capitolo 7.

⁶Si veda N. Alon, J. Spencer e P. Erdos, *The Probabilistic Method* (New York: John Wiley & Sons, Inc. 1992).

3.5 $P(\cdot | F)$ È UNA PROBABILITÀ

La Proposizione 5.1 che segue mostra che la probabilità condizionata soddisfa i tre assiomi delle probabilità.

Proposizione 5.1

- (a) $0 \leq P(E|F) \leq 1$.
- (b) $P(S|F) = 1$.
- (c) Se $E_i, i = 1, 2, \dots$ sono a due a due disgiunti, allora

$$P\left(\bigcup_1^\infty E_i | F\right) = \sum_1^\infty P(E_i | F)$$

Dimostrazione: Per provare (a) dobbiamo mostrare che $0 \leq P(EF)/P(F) \leq 1$. La prima disuguaglianza è ovvia, mentre la seconda discende dal fatto che $EF \subset F$, da cui $P(EF) \leq P(F)$. La (b) segue dalla

$$P(S|F) = \frac{P(SF)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

Proviamo (c); si ha

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i | F\right) &= \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right)F\right)}{P(F)} \\ &= \frac{P\left(\bigcup_1^\infty E_i F\right)}{P(F)} \quad \text{dato che} \quad \left(\bigcup_1^\infty E_i\right)F = \bigcup_1^\infty E_i F \\ &= \frac{\sum_1^\infty P(E_i F)}{P(F)} \\ &= \sum_1^\infty P(E_i | F) \end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza vale in quanto $E_i E_j = \emptyset$ implica che $E_i F E_j F = \emptyset$. ♦

Se definiamo $Q(E) = P(E|F)$, segue dalla Proposizione 5.1 che $Q(E)$ è una funzione di probabilità sullo spazio campionario S . Di conseguenza, a essa si applicano tutte le proposizioni riguardanti le probabilità dimostrate precedentemente. Ad esempio si ha

$$Q(E_1 \cup E_2) = Q(E_1) + Q(E_2) - Q(E_1 E_2)$$

o, equivalentemente,

$$P(E_1 \cup E_2 | F) = P(E_1 | F) + P(E_2 | F) - P(E_1 E_2 | F)$$

Inoltre, se definiamo la probabilità condizionata $Q(E_1|E_2)$ come $Q(E_1|E_2) = Q(E_1 E_2)/Q(E_2)$, allora si vede dall'Equazione (3.1) che

$$Q(E_1) = Q(E_1|E_2)Q(E_2) + Q(E_1|E_2^c)Q(E_2^c) \tag{5.1}$$

Dato che

$$\begin{aligned} Q(E_1|E_2) &= \frac{Q(E_1 E_2)}{Q(E_2)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2 | F)}{P(E_2 | F)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2 F)}{P(F)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2 F)}{P(E_2 F)} \\ &= \frac{P(E_1 E_2 F)}{P(F)} \\ &= P(E_1 | E_2 F) \end{aligned}$$

si vede che l'Equazione (5.1) equivale a

$$P(E_1 | F) = P(E_1 | E_2 F)P(E_2 | F) + P(E_1 | E_2^c F)P(E_2^c | F)$$

Esempio 5a. Riprendiamo l'Esempio 3a, riguardante una compagnia di assicurazioni che suddivide la gente in due classi - quelli propensi (30%) o meno (70%) agli incidenti. Durante ogni dato anno, una persona propensa agli incidenti avrà un incidente con probabilità 0.4, mentre lo stesso profilo per una persona non propensa agli incidenti prevede una probabilità pari a 0.2. Qual è la probabilità condizionata che un nuovo assicurato abbia un incidente nel secondo anno di rinnovo dell'assicurazione, sapendo che l'assicurato ha avuto un incidente nel primo anno?

Soluzione Se indichiamo con A l'evento "l'assicurato è propenso agli incidenti" e con $A_i, i = 1, 2$ l'evento "l'assicurato ha avuto un incidente nell'anno i ", la probabilità cercata $P(A_2 | A_1)$ si può ottenere condizionando sul fatto che l'assicurato sia o meno propenso agli incidenti, come segue:

$$P(A_2 | A_1) = P(A_2 | A A_1)P(A | A_1) + P(A_2 | A^c A_1)P(A^c | A_1)$$

Ora,

$$P(A | A_1) = \frac{P(A_1 A)}{P(A_1)} = \frac{P(A | A)P(A)}{P(A_1)}$$

Inoltre, $P(A)$ è per ipotesi uguale a 0.3, e nell'Esempio 3a abbiamo dedotto che $P(A_1) = 0.26$. Si ha quindi

$$P(A | A_1) = \frac{(0.4)(0.3)}{0.26} = \frac{6}{13}$$

da cui

$$P(A^c | A_1) = 1 - P(A | A_1) = \frac{7}{13}$$

Dato che $P(A_2|AA_1) = 0.4$ e che $P(A_2|A^cA_1) = 0.2$, si conclude che

$$P(A_2|A_1) = (0.4)\frac{6}{13} + (0.2)\frac{7}{13} \approx 0.29$$

Esempio 5b. È nato un bimbo, ma non si sa quale tra due uomini ne sia il padre. Prima di fare alcuna analisi genetica si suppone che p sia la probabilità che il padre sia l'ex partner (maschio n. 1), e che $1-p$ sia la probabilità che il padre sia il partner attuale (maschio n. 2) della mamma del bimbo. Il DNA prelevato alla madre e ai due uomini mostra che, in uno specifico punto del genoma, la madre ha la coppia di geni (A, A) , l'ex partner ha la coppia di geni (a, a) , e il partner attuale ha la coppia di geni (A, a) . Se il bimbo ha la coppia di geni (A, a) , qual è la probabilità che suo padre sia l'ex partner della mamma?

Soluzione Condizioniamo tutte le probabilità al fatto che la madre ha la coppia di geni (A, A) , che il maschio numero 1 ha la coppia di geni (a, a) , e che il maschio numero 2 ha la coppia di geni (A, a) . Sia M_i l'evento che il maschio numero i sia il padre, $i = 1, 2$, e sia $B_{A,a}$ l'evento che il bambino ha la coppia di geni (A, a) . La probabilità $P(M_1|B_{A,a})$ si ottiene allora come segue:

$$\begin{aligned} P(M_1|B_{A,a}) &= \frac{P(M_1B_{A,a})}{P(B_{A,a})} \\ &= \frac{P(B_{A,a}|M_1)P(M_1)}{P(B_{A,a}|M_1)P(M_1) + P(B_{A,a}|M_2)P(M_2)} \\ &= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + (1/2)(1-p)} \\ &= \frac{2p}{1+p} \end{aligned}$$

Essendo $\frac{2p}{1+p} > p$ per $p < 1$, si vede che l'informazione che la coppia di geni del bimbo è (A, a) aumenta la probabilità che il padre sia l'ex partner della mamma (maschio n. 1); ciò si poteva intuire dato che è più facile che il bimbo abbia la coppia di geni (A, a) se suo padre è il maschio n. 1 (ciò avviene con probabilità condizionata uguale a 1) che se suo padre è il maschio n. 2 (ciò avviene con probabilità condizionata uguale a 1/2).

Il prossimo esempio tratta di un problema della teoria della serie.

Esempio 5c. Si realizzano delle prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p e l'insuccesso ha probabilità $q = 1 - p$. Qual è la probabilità che una serie di n successi consecutivi si realizzi prima di una serie di m insuccessi consecutivi?

Soluzione Sia E l'evento "una serie di n successi consecutivi si realizza prima di una serie di m insuccessi consecutivi". Per ottenere $P(E)$, cominciamo a condizionare rispetto all'esito della prima prova. Precisamente, indicando con H l'evento "la prima prova è un successo", si ottiene

$$P(E) = pP(E|H) + qP(E|H^c) \quad (5.2)$$

Ora, sapendo che la prima prova ha avuto successo, un modo per ottenere una serie di n successi prima di una serie di m successi è quello di ottenere $n - 1$ successi consecutivi nelle successive $n - 1$ prove. Indicando con F l'evento "tutte le prove dalla 2 alla n hanno successo" si ottiene

$$P(E|H) = P(E|FH)P(F|H) + P(E|F^cH)P(F^c|H) \quad (5.3)$$

Chiaramente $P(E|FH) = 1$; inoltre se si realizza l'evento F^cH , la prima prova è stata un successo, ma c'è stato un insuccesso nelle successive $n - 1$ prove. Ora, quando capita l'insuccesso, è come se i successi precedenti venissero cancellati e la situazione riparte come dall'inizio. Ne segue che

$$P(E|F^cH) = P(E|H^c)$$

Ora, l'indipendenza delle prove implica che F e H sono indipendenti, ed essendo $P(F) = p^{n-1}$, dalla (5.3) otteniamo

$$P(E|H) = p^{n-1} + (1 - p^{n-1})P(E|H^c) \quad (5.4)$$

Otteniamo ora in modo simile l'espressione di $P(E|H^c)$. Indichiamo con G l'evento "le prove dalla 2 alla m sono degli insuccessi". Allora

$$P(E|H^c) = P(E|GH^c)P(G|H^c) + P(E|G^cH^c)P(G^c|H^c) \quad (5.5)$$

Ora, GH^c è l'evento "le prime m prove sono degli insuccessi", e quindi $P(E|GH^c) = 0$. Inoltre, se si realizza G^cH^c , la prima prova è un insuccesso, ma vi è almeno un successo nelle $m - 1$ prove successive. Dato che questo successo spazza via tutti i precedenti insuccessi, si ha che

$$P(E|G^cH^c) = P(E|H)$$

Pertanto, essendo $P(G^c|H^c) = P(G^c) = 1 - q^{m-1}$, dalla (5.5) otteniamo

$$P(E|H^c) = (1 - q^{m-1})P(E|H) \quad (5.6)$$

Risolvendo le Equazioni (5.4) e (5.6) otteniamo

$$P(E|H) = \frac{p^{n-1}}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}}$$

e

$$P(E|H^c) = \frac{(1 - q^{m-1})p^{n-1}}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}}$$

da cui

$$\begin{aligned} P(E) &= pP(E|H) + qP(E|H^c) \\ &= \frac{p^n + qp^{n-1}(1 - q^{m-1})}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}} \\ &= \frac{p^{n-1}(1 - q^m)}{p^{n-1} + q^{m-1} - p^{n-1}q^{m-1}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

È interessante notare che per la simmetria del problema, la probabilità di ottenere una serie di m insuccessi prima di una serie di n successi è data dalla (5.7) scambiando p con q e n con m . Tale probabilità è quindi uguale a

$$P\{\text{serie di } m \text{ insuccessi prima di una serie di } n \text{ successi}\} \\ = \frac{q^{m-1}(1-p^n)}{q^{m-1} + p^{n-1} - q^{m-1}p^{n-1}} \quad (5.8)$$

Dato che la somma delle probabilità ricavate in (5.7) e (5.8) dà 1, segue che, con probabilità 1, vi sarà prima o poi una serie di n successi o una serie di m insuccessi.

A titolo di esempio di applicazione della (5.7), si noti che lanciando una moneta equa la probabilità che una serie di 2 teste preceda una serie di 3 croci è $\frac{7}{10}$, e che quella che vi siano 2 teste consecutive prima di 4 croci consecutive sale a $\frac{5}{6}$. ■

Nel prossimo esempio torniamo al problema degli accoppiamenti (Esempio 5m, Capitolo 2); otterremo qui una soluzione utilizzando le probabilità condizionate.

Esempio 5d. A una festa n uomini gettano il proprio cappello. I cappelli vengono mescolati, e ogni uomo ne sceglie uno a caso. Diciamo che c'è una corrispondenza se un uomo seleziona il proprio cappello. Qual è la probabilità che

- (a) non vi siano corrispondenze?
- (b) vi siano esattamente k corrispondenze?

Soluzione (a) Sia E l'evento "non vi sono corrispondenze", e per mettere in evidenza la dipendenza da n poniamo $P_n = P(E)$. Iniziamo condizionando rispetto al fatto che il primo uomo selezioni o meno il proprio cappello - chiamiamo questi eventi M e M^c . Allora

$$P_n = P(E) = P(E|M)P(M) + P(E|M^c)P(M^c)$$

Chiaramente, $P(E|M) = 0$, sicché

$$P_n = P(E|M^c) \frac{n-1}{n} \quad (5.9)$$

Ora, $P(E|M^c)$ è la probabilità che non vi siano corrispondenze quando $n-1$ uomini scelgono i cappelli da un insieme di $n-1$ cappelli che non contiene il cappello di uno di questi. Ciò può accadere solo in due modi alternativi. O non vi sono corrispondenze e l'uomo extra non seleziona il cappello extra (quello dell'uomo che ha scelto per primo), o non vi sono corrispondenze e l'uomo extra seleziona il cappello extra. La probabilità del primo evento è P_{n-1} , come si vede vedendo il cappello extra come "appartenente" all'uomo extra.

Dato che il secondo evento ha una probabilità pari a $[1/(n-1)]P_{n-2}$, si ha

$$P(E|M^c) = P_{n-1} + \frac{1}{n-1}P_{n-2}$$

e quindi, dalla Formula (5.9),

$$P_n = \frac{n-1}{n}P_{n-1} + \frac{1}{n}P_{n-2}$$

o, equivalentemente,

$$P_n - P_{n-1} = -\frac{1}{n}(P_{n-1} - P_{n-2}) \quad (5.10)$$

Dato che P_n è la probabilità che non vi siano accoppiamenti quando n uomini selezionano a caso i loro cappelli, si ha

$$P_1 = 0 \quad P_2 = \frac{1}{2}$$

Così, dalla (5.10) si deduce che

$$P_3 - P_2 = -\frac{(P_2 - P_1)}{3} = -\frac{1}{3!} \quad \text{o} \quad P_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$P_4 - P_3 = -\frac{(P_3 - P_2)}{4} = \frac{1}{4!} \quad \text{o} \quad P_4 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

e, in generale, si vede che

$$P_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

(b) Per ottenere la probabilità che vi siano esattamente k corrispondenze, consideriamo un gruppo fissato di k uomini. La probabilità che essi, e solo essi, selezionino i loro cappelli è

$$\frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-(k-1)} P_{n-k} = \frac{(n-k)!}{n!} P_{n-k}$$

dove P_{n-k} è la probabilità condizionata che gli altri $n-k$ uomini, scegliendo tra i loro cappelli, non abbiano corrispondenze. Dato che vi sono $\binom{n}{k}$ scelte di un insieme di k uomini, la probabilità che vi siano esattamente k corrispondenze è

$$\frac{P_{n-k}}{k!} = \frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!}$$

Un concetto importante della teoria della probabilità è quello della indipendenza condizionata di eventi. Diciamo che gli eventi E_1 e E_2 sono *condizionatamente indipendenti* dato F se

$$P(E_1|E_2F) = P(E_1|F) \quad (5.11)$$

o, equivalentemente,

$$P(E_1E_2|F) = P(E_1|F)P(E_2|F) \quad (5.12)$$

La nozione di indipendenza condizionata si può facilmente estendere a più di due eventi e ciò viene lasciato come esercizio.

Il lettore noti come il concetto di indipendenza condizionata è stato usato implicitamente nell'Esempio 5a, dove si è assunto implicitamente che l'evento "l'assicurato ha un incidente nell' i -esimo anno di polizza, $i = 1, 2, \dots$," fosse condizionatamente indipendente dato che la persona fosse propensa o meno agli incidenti. [Ciò è stato usato per calcolare $P(A_2|AA_1)$ e $P(A_2|A^cA_1)$, rispettivamente uguali a 0.4 e 0.2]. L'esempio che segue, spesso citato come la regola della successione di Laplace, illustra ulteriormente il concetto di indipendenza condizionata.

Esempio 5e. La regola della successione di Laplace. Una scatola contiene $k + 1$ monete. La moneta i -esima, se lanciata, dà testa con probabilità i/k , $i = 0, 1, \dots, k$. Si sceglie a caso una moneta dalla scatola e la si lancia ripetutamente. Se i primi n lanci danno testa, qual è la probabilità condizionata che lo stesso avvenga al lancio $(n + 1)$ -esimo?

Soluzione Sia C_i l'evento "è stata scelta la moneta i , $i = 0, 1, \dots, k$; sia F_n l'evento "i primi n lanci danno testa" e sia H l'evento "viene testa al $(n + 1)$ -esimo lancio". La probabilità cercata, $P(H|F_n)$, si ottiene come segue:

$$P(H|F_n) = \sum_{i=0}^k P(H|F_n C_i) P(C_i|F_n)$$

Ora, supponendo di aver scelto la moneta i , è ragionevole supporre che gli esiti dei lanci siano condizionatamente indipendenti, nei quali viene testa con probabilità i/k . Si ha allora

$$P(H|F_n C_i) = P(H|C_i) = \frac{i}{k}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} P(C_i|F_n) &= \frac{P(C_i F_n)}{P(F_n)} \\ &= \frac{P(F_n|C_i)P(C_i)}{\sum_{j=0}^k P(F_n|C_j)P(C_j)} \\ &= \frac{(i/k)^n [1/(k+1)]}{\sum_{j=0}^k (j/k)^n [1/(k+1)]} \end{aligned}$$

Quindi

$$P(H|F_n) = \frac{\sum_{i=0}^k (i/k)^{n+1}}{\sum_{j=0}^k (j/k)^n}$$

Se k è sufficientemente grande, possiamo usare l'approssimazione integrale

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^k \left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \left(\frac{j}{k}\right)^n \approx \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

sicché, per k sufficientemente grande,

$$P(H|F_n) \approx \frac{n+1}{n+2}$$

Esempio 5f. Aggiornamento sequenziale dell'informazione. Si supponga che vi siano n ipotesi o cause mutualmente esclusive ed esaustive, con probabilità iniziali (dette anche probabilità a priori) $P(H_i)$, $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$. Ora, sapendo che è avvenuto un dato evento E , la probabilità condizionata che H_i sia la causa o ipotesi corretta (talvolta chiamata probabilità aggiornata o a posteriori di H_i) è data da

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(E|H_j)P(H_j)} \quad (5.13)$$

Supponiamo di sapere innanzitutto che si è realizzato l'evento E_1 , e che poi si è realizzato anche E_2 . Allora, conoscendo solo la prima informazione, la probabilità condizionata che la causa corretta sia H_i è

$$P(H_i|E_1) = \frac{P(E_1|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(E_1|H_j)P(H_j)}$$

mentre la probabilità condizionata che H_i sia la causa corretta, sapendo che si sono realizzati i due eventi, è data da

$$P(H_i|E_1 E_2) = \frac{P(E_1 E_2|H_i)P(H_i)}{\sum_j P(E_1 E_2|H_j)P(H_j)}$$

Tuttavia, ci si può chiedere quand'è che si può calcolare $P(H_i|E_1 E_2)$ utilizzando il membro a destra dell'Equazione (5.13), con $E_1 = E_2$, e con $P(H_j)$ sostituita da $P(H_j|E_1)$, $j = 1, \dots, n$. In altri termini, quand'è legittimo interpretare $P(H_j|E_1)$, $j \geq 1$, come le probabilità a priori ed utilizzare la (5.13) per calcolare la probabilità a posteriori?

Soluzione. Ciò è legittimo purché, per ogni $j = 1, \dots, n$, gli eventi E_1 ed E_2 siano condizionatamente indipendenti dato H_j . Infatti se così è, si ha

$$P(E_1 E_2|H_j) = P(E_2|H_j)P(E_1|H_j), \quad j = 1, \dots, n$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} P(H_i|E_1 E_2) &= \frac{P(E_2|H_i)P(E_1|H_i)P(H_i)}{P(E_1 E_2)} \\ &= \frac{P(E_2|H_i)P(E_1|H_i)}{P(E_1 E_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(E_2|H_i)P(H_i|E_1)P(E_1)}{P(E_1E_2)} \\ &= \frac{P(E_2|H_i)P(E_1|H_i)}{Q(1,2)} \end{aligned}$$

dove si è posto $Q(1,2) = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)}$. Dato che l'equazione precedente vale per ogni i , sommando otteniamo

$$1 = \sum_{i=1}^n P(H_i|E_1E_2) = \sum_{i=1}^n \frac{P(E_2|H_i)P(E_1|H_i)}{Q(1,2)}$$

sicchè

$$Q(1,2) = \sum_{i=1}^n P(E_2|H_i) P(H_i|E_1)$$

da cui il risultato

$$P(H_i|E_1E_2) = \frac{P(E_2|H_i)P(H_i|E_1)}{\sum_{i=1}^n P(E_2|H_i)P(H_i|E_1)}$$

Ad esempio supponiamo di dover scegliere, tra due monete, quella da lanciare. Sia H_i l'evento che viene scelta la moneta i , $i = 1, 2$. Supponiamo che, scegliendo la moneta i , viene testa con probabilità p_i , $i = 1, 2$. Il risultato precedente mostra allora che per aggiornare sequenzialmente la probabilità che la moneta ad essere stata lanciata sia la numero 1, dati i risultati dei lanci precedenti, basta utilizzare la probabilità condizionata (all'esito dell'ultimo lancio) che sia stata usata la moneta numero 1. A tal fine non è pertanto necessario conoscere i risultati dei lanci precedenti. ■

RIASSUNTO

Se E ed F sono due eventi, la probabilità condizionata di E dato F , indicata con $P(E|F)$, è data da

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

L'identità

$$P(E_1E_2 \cdots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1) \cdots P(E_n|E_1 \cdots E_{n-1})$$

è nota come la regola del *prodotto delle probabilità*.

Un'utile identità è

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c)$$

Essa può essere usata per calcolare $P(E)$ "condizionando" sul fatto che F si realizzi o non si realizzi.

$P(H)/P(H^c)$ è chiamato il *rapporto a favore* dell'evento H . L'identità

$$\frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} = \frac{P(H) P(E|H)}{P(H^c) P(E|H^c)}$$

mostra che quando si acquisisce una nuova prova E , il nuovo valore del rapporto a favore di H si ottiene moltiplicando il vecchio valore per il quoziente della probabilità condizionata della nuova prova dato H con la probabilità condizionata della nuova prova dato il complementare di H .

Siano F_i , $i = 1, \dots, n$, degli eventi a due a due disgiunti la cui unione è l'intero spazio campionario. L'identità

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)}$$

è nota come *formula di Bayes*. Se gli eventi F_i , $i = 1, \dots, n$, sono delle ipotesi alternative, la formula di Bayes mostra come si calcolano le probabilità condizionate di queste ipotesi quando si dispone di una nuova prova E .

L'espressione che compare al denominatore nella formula di Bayes è dovuto al fatto che

$$P(E) = \sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)$$

tale formula è chiamata *legge delle probabilità totali*.

Se $P(EF) = P(E)P(F)$, diciamo che gli eventi E ed F sono *indipendenti*. La condizione equivale a $P(E|F) = P(E)$ e a $P(F|E) = P(F)$. Pertanto E ed F sono indipendenti se la conoscenza della realizzazione dell'uno non altera la probabilità dell'altro.

Gli eventi E_1, \dots, E_n si dicono *indipendenti* se per ogni sottoinsieme E_{i_1}, \dots, E_{i_r} di essi,

$$P(E_{i_1} \cdots E_{i_r}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_r})$$

Fissato un dato evento F , $P(E|F)$ è una funzione di probabilità sugli eventi E dello spazio campionario.

ESERCIZI

1. Si lanciano due dadi non truccati. Qual è la probabilità condizionata che almeno uno dei due dia 6 sapendo che i dadi danno due numeri diversi?
2. Si lanciano due dadi non truccati. Qual è la probabilità condizionata che il primo dia 6 sapendo che la somma dei dadi è i ? Calcolarla per i compreso tra 2 e 12.
3. Usare la Formula (2.1) per calcolare, in una mano di bridge, la probabilità che Est abbia 3 picche sapendo che Nord-Sud hanno in totale 8 picche.
4. Qual è la probabilità che almeno uno di due dadi non truccati dia 6, sapendo che la somma dei dadi è i , $i = 2, 3, \dots, 12$?
5. Un'urna contiene 6 palline bianche e 9 palline nere. Se si scelgono a caso 4 palline senza rimpiazzo, qual è la probabilità che le prime due siano bianche e le ultime due siano nere?
6. Si consideri un'urna contenente 12 palline, 8 delle quali sono bianche. Se ne estraggono 4 a caso. Considerando i due casi dell'estrazione con rimpiazzo e senza rimpiazzo, determinare la probabilità condizionata che la prima e la terza pallina siano bianche, sapendo che in tutto sono state estratte 3 palline bianche?

7. Un re proviene da una famiglia con 2 figli. Qual è la probabilità che l'altro figlio sia sua sorella?
8. Una coppia ha 2 bambini. Qual è la probabilità che siano entrambe femmine, sapendo che il primogenito è una femmina?
9. Si considerano 3 urne. L'urna A contiene 2 palline bianche e 4 palline rosse; l'urna B contiene 8 palline bianche e 4 palline rosse; l'urna C contiene 1 pallina bianca e 3 palline rosse. Scegliendo una pallina da ogni urna, qual è la probabilità che la pallina estratta da A fosse bianca, sapendo di avere estratto esattamente 2 palline bianche?
10. Si scelgono tre carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo da poker di 52 carte. Calcolare la probabilità condizionata che la prima carta scelta sia di picche, sapendo che la seconda e la terza sono di picche.
11. Si scelgono due carte a caso, senza rimpiazzo, da un mazzo di 52 carte. Sia B l'evento che entrambe siano degli assi; sia A_p l'evento che sia stato estratto l'asso di picche, e A l'evento che sia stato estratto almeno un asso. Determinare
- (a) $P(B|A_p)$
 (b) $P(B|A)$
12. Uno studente ha intenzione di dare un esame universitario sostenendo tre prove di accertamento intermedie. Se una di queste prove non è superata lo studente non può effettuare la prova successiva. La probabilità che lo studente superi la prima prova è 0.9. Se egli supera la prima, la probabilità condizionata che superi la seconda è 0.8, e se egli supera la prima e la seconda prova, la probabilità condizionata che superi la terza è pari a 0.7.
- (a) Qual è la probabilità che lo studente superi tutte le tre prove intermedie?
 (b) Sapendo che lo studente non ha superato tutte le prove, qual è la probabilità condizionata che abbia fallito la seconda prova?
13. Un mazzo di 52 carte (contenente 4 assi) è suddiviso a caso in 4 mani di 13 carte ciascuna. Si vuole determinare p , la probabilità che ogni mano contenga un asso. Sia E_i l'evento "la mano i ha esattamente un asso". Determinare $p = P(E_1 E_2 E_3 E_4)$ usando la regola del prodotto.
14. Un'urna contiene inizialmente 5 palline bianche e 7 palline nere. A ogni estrazione si prende nota del colore della pallina che viene poi rimessa nell'urna assieme ad altre 2 palline dello stesso colore. Calcolare la probabilità che
- (a) le prime 2 palline selezionate siano nere e le 2 successive siano bianche;
 (b) esattamente due delle prime 4 palline estratte siano nere.
15. Una gravidanza extrauterina si può sviluppare 2 volte più facilmente se la donna incinta è una fumatrice piuttosto che una non fumatrice. Se il 32% delle donne in età fertile sono fumatrici, quale percentuale di donne che sviluppano una gravidanza extrauterina sono delle fumatrici?
16. Il 98% dei neonati sopravvive al parto. Tuttavia il 15% dei parti sono cesarei, e quando si realizza un parto cesareo il neonato sopravvive nel 96% dei casi. Qual è la probabilità che il neonato di una donna scelta a caso tra quelle che non fanno un parto cesareo sopravviva al parto?
17. In una comunità, il 36% delle famiglie ha un cane, e il 22% di quelle che hanno un cane possiede un gatto. Inoltre, il 30% delle famiglie ha un gatto. Qual è
- (a) la probabilità che una famiglia scelta a caso possieda sia un cane che un gatto;
 (b) la probabilità condizionata che una famiglia scelta a caso possieda un cane sapendo che possiede un gatto?
18. Il 46% degli elettori di un comune si ritiene politicamente di centro, il 30% di sinistra e il 24% di destra. In una recente elezione sono andati a votare il 35% degli elettori di centro, il 62% di quelli di sinistra e il 58% di quelli di destra. Un elettore è scelto a caso. Sapendo che l'elettore ha votato alle scorse elezioni, qual è la probabilità che si tratti di
- (a) un centrista;
 (b) uno di sinistra;

- (c) uno di destra?
 (d) Quale percentuale di elettori hanno partecipato alla scorsa elezione?
19. Il 48% delle donne e il 37% degli uomini che hanno frequentato un corso per smettere di fumare diventano non fumatori per almeno un anno dopo aver concluso il corso. Queste persone si incontrano alla fine dell'anno per festeggiare il successo del corso. Se il 62% dei partecipanti al corso erano uomini,
- (a) qual è la percentuale di donne presenti alla festa?
 (b) quale percentuale degli iscritti al corso ha partecipato alla festa?
20. Il 52% degli studenti di una scuola sono ragazze. Il 5% degli studenti della scuola frequenta un corso di informatica. Il 2% degli studenti sono ragazze che frequentano il corso di informatica. Scegliendo uno studente a caso, si calcoli la probabilità condizionata che
- (a) si tratti di una studentessa, sapendo che frequenta il corso di informatica;
 (b) lo studente frequenti un corso di informatica, sapendo che si tratta di una studentessa.
21. È stato effettuato un sondaggio sul salario annuale di 500 coppie sposate, con il seguente risultato.

Moglie	Marito	
	Meno di 25 000 euro	Più di 25 000 euro
Meno di 25 000 euro	212	198
Più di 25 000 euro	36	54

- Quindi, ad esempio, in 36 coppie del campione, la moglie ha guadagnato di più e il marito ha guadagnato meno di 25 000 euro. Scegliendo a caso una coppia del campione, qual è
- (a) la probabilità che il marito guadagni meno di 25 000 euro;
 (b) la probabilità condizionata che la moglie guadagni più di 25 000 euro sapendo che anche il marito guadagna più di quella somma;
 (c) la probabilità condizionata che la moglie guadagni più di 25 000 euro sapendo che il marito guadagna meno di quella somma?
22. Si lanciano tre dadi: uno rosso, uno giallo e uno blu. Indicando, rispettivamente, con B, G, R il numero che appare sul dado blu, giallo e rosso, ci proponiamo di calcolare $P(B < G < R)$.
- (a) Qual è la probabilità che non vi siano due dadi che danno lo stesso numero?
 (b) Sapendo che non vi sono due dadi con lo stesso numero, qual è la probabilità condizionata che $B < G < R$?
 (c) Quanto vale $P(B < G < R)$?
23. L'urna I contiene 2 palline bianche e 4 palline rosse, mentre l'urna II ne contiene una bianca e una rossa. Una pallina viene estratta a caso dall'urna I e messa nell'urna II; si estrae poi a caso una pallina dall'urna II. Qual è
- (a) la probabilità che la pallina estratta dall'urna II sia bianca;
 (b) la probabilità condizionata che la pallina trasferita fosse bianca, sapendo che viene estratta una pallina bianca dall'urna II?
24. Due palline colorate ciascuna di oro o di nero sono messe in un'urna. Supponiamo che ciascuna pallina sia colorata di nero con probabilità $\frac{1}{2}$, e che questi eventi siano indipendenti.
- (a) Si supponga di sapere che il colore oro è stato utilizzato (e che quindi almeno una delle palline sia dipinta d'oro). Calcolare la probabilità condizionata che entrambe le palline siano dorate;
 (b) Supponiamo ora che l'urna si rovesci e che fuoriesca una pallina d'oro. Qual è in questo caso la probabilità che entrambe le palline siano d'oro? Spiegare.

25. Il metodo che segue è stato proposto per stimare il numero di persone di età superiore ai 50 anni che risiedono in una città di 100 000 abitanti. "Quando cammini per strada, fai la percentuale delle persone che incontri che superano i 50 anni. Ripeti il procedimento per un qualche giorno; poi moltiplica la percentuale ottenuta per 100 000 per ottenere la stima desiderata". Commentare il metodo esposto.

SUGGERIMENTO: Sia p la percentuale delle persone della città che hanno più di 50 anni. Inoltre, sia α_1 la percentuale di tempo che una persona sotto i 50 anni passa nelle strade e α_2 il valore corrispondente per le persone sopra i 50 anni. Qual è la quantità che il metodo descritto permette di stimare? Quand'è che questo valore è approssimativamente uguale a p ?

26. Si supponga che il 5% degli uomini e lo 0.25% delle donne siano daltonici. Si sceglie a caso un daltonico. Qual è la probabilità che questa persona sia un uomo? Supporre che vi sia lo stesso numero di uomini e donne. Rispondere alla stessa domanda se gli uomini sono il doppio delle donne.

27. Tutti i lavoratori di una certa compagnia vanno al lavoro in macchina e parcheggiano nello spiazzo aziendale. La compagnia è interessata a determinare il numero medio di lavoratori per auto. Quale dei due seguenti metodi permetterà alla compagnia di stimare questa quantità? Dare delle spiegazioni.

1. Si scelgono a caso n lavoratori, per ognuno si rileva il numero di persone che si trovavano nell'auto con lui, e si fa la media degli n valori.
2. Si scelgono a caso n auto nel parcheggio, si rileva il numero di persone che hanno viaggiato nelle auto, e si fa la media degli n valori.

28. Si mescola un normale mazzo di carte di 52 carte; le carte vengono poi girate una a una finché non appare il primo asso. Sapendo che il primo asso è la ventesima carta girata, qual è la probabilità condizionata che la carta seguente sia

- (a) l'asso di picche;
- (b) il due di fiori?

29. Una scatola contiene 15 palle da tennis, 9 delle quali non sono mai state usate. Si scelgono a caso 3 di queste palle, ci si gioca, e si rimettono nella scatola. Dopo, si scelgono altre 3 palle a caso. Determinare la probabilità che nessuna di queste sia mai stata usata.

30. Si considerano due scatole, una contenente un sasso nero e un sasso bianco, l'altra contenente 2 sassi neri e un sasso bianco. Si sceglie a caso una scatola, e si prende un sasso a caso dalla scatola. Qual è la probabilità che il sasso sia nero? Qual è la probabilità che sia stata scelta la prima scatola, sapendo che il sasso è bianco?

31. Un'impresa industriale ha installato un sistema automatico per il controllo di qualità, il quale garantisce che, se un pezzo è difettoso, esso viene eliminato con probabilità 0.995. C'è una piccola probabilità, pari a 0.001, che anche un pezzo non difettoso venga eliminato. Si sa anche che la probabilità che un pezzo sia difettoso è 0.2. Si calcoli la probabilità che un pezzo che non sia stato eliminato al controllo di qualità sia difettoso.

32. Una famiglia ha j bambini con probabilità p_j , dove $p_1 = 0.1, p_2 = 0.25, p_3 = 0.35, p_4 = 0.3$. Un bimbo è scelto a caso da una data famiglia. Sapendo che questo bambino è il primogenito della famiglia, determinare la probabilità condizionata che la famiglia abbia

- (a) solo un bambino;
- (b) 4 bambini.

Ripetere (a) e (b) nel caso in cui il bimbo scelto a caso è il più giovane della famiglia.

33. La parola *rigore* si scrive *rigour* in inglese, *rigor* in americano. Un uomo che soggiorna in un hotel di Parigi scrive questa parola, una lettera scelta a caso nella parola scritta è una vocale. Se il 40% delle persone che parlano inglese in albergo sono inglesi e il 60% sono americani, qual è la probabilità che l'uomo sia inglese?

34. Nell'Esempio 3f, supponiamo che la nuova prova sia soggetta a diverse interpretazioni possibili e che di fatto essa mostri solo che il colpevole ha al 90% quella data caratteristica. In questo caso quant'è probabile che il sospetto sia colpevole (supponendo, come nell'esempio, che abbia quella caratteristica)?

35. Un regalo è stato nascosto con probabilità 0.6 dalla mamma, con probabilità 0.4 dal papà. Quando la mamma nasconde il regalo lo fa mettendolo al piano di sopra nel 70% dei casi, al piano di sotto nel 30% dei casi. Il papà invece lo nasconde allo stesso modo al piano di sopra o al piano di sotto.

- (a) Qual è la probabilità che il regalo si trovi al piano di sopra?
- (b) Sapendo che il regalo si trova al piano di sotto, qual è la probabilità che sia stato nascosto dal papà?

36. I negozi A, B e C hanno 50, 75, 100 impiegati dei quali, rispettivamente, 50%, 60% e 70% sono donne. Le dimissioni sono ugualmente probabili tra tutti gli impiegati, indipendentemente dal sesso. Una impiegata dà le dimissioni. Qual è la probabilità che lavori nel negozio C ?

37. (a) Un giocatore ha in tasca una moneta non truccata e una moneta con due teste. Egli sceglie una moneta a caso e la lancia, viene testa. Qual è la probabilità che si tratti della moneta non truccata?

(b) Supponiamo che il giocatore rilanci la stessa moneta e che venga ancora testa. Qual è ora la probabilità che si tratti della moneta non truccata?

(c) Supponiamo ora che un terzo lancio della stessa moneta dia croce. Qual è ora la probabilità che si tratti della moneta non truccata?

38. L'urna A ha 5 palline bianche e 7 palline nere. L'urna B ha 3 palline bianche e 12 palline nere. Lanciamo una moneta non truccata. Se esce testa, si estrae una pallina dall'urna A , mentre se viene croce, si estrae una pallina dall'urna B . Si supponga di aver estratto una pallina bianca. Qual è la probabilità che sia uscita croce?

39. Nell'Esempio 3a, qual è la probabilità che un assicurato abbia un incidente il secondo anno, sapendo che non ne ha avuti il primo?

40. Si estraggono da un'urna 3 palline come segue: all'inizio l'urna contiene 5 palline bianche e 7 palline rosse. Si estrae una pallina e si prende nota del colore. La pallina viene poi rimessa nell'urna con un'ulteriore pallina dello stesso colore. Il procedimento viene ripetuto altre 2 volte. Determinare la probabilità che tra le palline estratte vi siano:

- (a) 0 palline bianche;
- (b) 1 pallina bianca;
- (c) 3 palline bianche;
- (d) 2 palline bianche.

41. Si mescola un mazzo di carte che viene poi diviso in due metà di 26 carte ciascuno. Si prende una carta da una delle due metà; si vede che si tratta di un asso. L'asso viene allora inserito nell'altro mazzetto, che viene poi mescolato, e dal quale viene scelta una carta a caso. Determinare la probabilità che questa carta sia un asso.

SUGGERIMENTO: Condizionare rispetto al fatto che la carta selezionata sia quella scambiata.

42. Il 12% della popolazione italiana risiede tra Sardegna e Sicilia. L'1.3% della popolazione residente in Italia guadagna più di euro 250 000 all'anno, mentre un totale di 3,3% tra residenti in Sardegna o Sicilia guadagna più di euro 250 000 all'anno.

- (a) Qual è la proporzione di italiani non isolani che guadagna più di euro 250 000 all'anno?
- (b) Una persona residente in Italia è scelta a caso guadagna più di euro 250 000 all'anno: qual è la probabilità che la persona risieda in Sardegna o in Sicilia?

43. Una scatola contiene 3 monete. Una ha due teste, la seconda è non truccata e la terza è una moneta sbilanciata che dà testa nel 75% dei casi. Si sceglie a caso una delle 3 monete e la si lancia: viene testa. Qual è la probabilità che si tratti della moneta con 2 teste?

44. Tre prigionieri sono informati dal loro boia che uno di loro è stato scelto a caso per l'esecuzione, mentre gli altri due sono liberi. Il prigioniero A chiede al boia di indicargli privatamente uno dei suoi compagni di sventura che sarà liberato, assicurandolo che non c'è nessun male a divulgare questa informazione sapendo già che almeno uno dei due sarà

$P(D|E) = \frac{P(E|D)P(D)}{P(E)}$
 $= \frac{0.005 \cdot 0.2}{0.001 + 0.999 \cdot 0.87} = 0.002$

liberato. Il boia (un mancato probabilista) rifiuta di rispondere alla domanda, osservando che se A sa quale dei due compagni sarà liberato, allora la sua probabilità di essere giustiziato salirebbe da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$ perché sarebbe uno dei due prigionieri rimasti. Cosa pensate del ragionamento del boia?

45. Si dispone di 10 monete tali che se si lancia la moneta i , testa appare con probabilità $i/10$, $i = 1, 2, \dots, 10$. Si sceglie a caso una di queste monete e la si lancia: viene testa. Qual è la probabilità condizionata che si trattasse della quinta moneta?
- *46. In un dato anno un assicurato automobilistico maschio farà una richiesta di rimborso con probabilità p_m , mentre una donna lo farà con probabilità p_f , in cui $p_f \neq p_m$. La percentuale di assicurati maschi è α , $0 < \alpha < 1$. Si sceglie a caso un assicurato/a. Se A_i è l'evento "l'assicurato farà una richiesta di rimborso nell'anno i ", mostrare che

$$P(A_2|A_1) > P(A_1)$$

Dare una spiegazione intuitiva della disuguaglianza precedente.

47. Un'urna contiene 5 palline bianche e 10 palline nere. Si lancia un dado non truccato e si prende a caso il numero che esce di palline dall'urna. Qual è la probabilità che tutte le palline scelte siano bianche? Qual è la probabilità condizionata che sia uscito il 3 sapendo che tutte le palline estratte sono bianche?
- *48. Due comodini apparentemente identici hanno ciascuno 2 cassetti. Il comodino A contiene una moneta d'argento in ogni cassetto, mentre il comodino B contiene una moneta d'argento in un cassetto e una d'oro nell'altro. Si sceglie a caso un comodino, si apre uno dei due cassetti e si trova una moneta d'argento. Qual è la probabilità che vi sia una moneta d'argento nell'altro cassetto?
49. Il tumore più frequente negli uomini è quello alla prostata. Un indicatore utile per sapere se un uomo ha un tumore alla prostata è il livello del PSA (antigene specifico prostatico) che è prodotto esclusivamente dalla prostata. Ora, mentre il livello del PSA indica presenza del tumore, il test che si fa per rilevarlo è notoriamente inaffidabile. Infatti, la probabilità che ad un uomo sano venga rilevato un alto livello di PSA è approssimativamente pari a 0.135, tale probabilità cresce a circa 0.268 se l'uomo invece ha il tumore. Se, basandosi su altri fattori, un medico ritiene certo al 70% che il suo paziente abbia un tumore alla prostata, qual è la probabilità condizionata che egli abbia effettivamente un tumore se:
- (a) il test indica un livello elevato di PSA?
 (b) il test non indica un livello elevato di PSA?
- Rispondere nuovamente alle domande se il medico suppone inizialmente che vi sia un 30% di possibilità che il paziente abbia un tumore.
50. Supponiamo che una compagnia di assicurazioni classifichi la gente in tre classi: rischio basso, rischio medio, rischio alto, a seconda della loro probabilità a essere coinvolti in un incidente nel corso di un anno, che è rispettivamente pari a 0.05, 0.15, 0.30. Se il 20% della popolazione è a rischio basso, il 50% è a rischio medio e il 30% della popolazione è a rischio alto, qual è la percentuale di popolazione che avrà un incidente nel giro di un anno? Se l'assicurato A non ha avuto incidenti nel 1997, qual è la probabilità che si tratti di una persona a rischio basso?
51. Un'impiegata chiede una lettera di raccomandazione al suo capo per un nuovo lavoro, stimando che vi sia un 80% di possibilità di ottenere il lavoro se riceve una forte raccomandazione, un 40% di possibilità con una raccomandazione moderatamente buona e un 10% con una raccomandazione debole. L'impiegata stima inoltre che la probabilità di avere una raccomandazione forte, moderata o debole sia, rispettivamente, 0.7, 0.2, 0.1.
- (a) Qual è la probabilità che l'impiegata ottenga un nuovo lavoro?
 (b) Sapendo che l'impiegata riceve l'offerta, qual è la probabilità condizionata che la raccomandazione sia stata forte/media/debole?
 (c) Sapendo che l'impiegata non riceve l'offerta di lavoro, qual è la probabilità condizionata che la raccomandazione sia stata forte/media/debole?

$$(1) P(Ma|Lu^c) = \frac{P(Ma, Lu^c)}{P(Lu^c)} = \frac{P(Ma)}{P(Lu^c)} = \frac{0,2 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,4}{0,85 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,4} = \frac{0,16}{0,89}$$

Esercizi 119

Giorno	$P(\text{email} \text{ammesso})$	$P(\text{email} \text{non ammesso})$
Lunedì	0.15	0.05
Martedì	0.20	0.10
Mercoledì	0.25	0.10
Giovedì	0.15	0.15
Venerdì	0.10	0.20

da assegnare insieme agli esercizi sull'indip. condiz.

- *52. Ali, un ragazzo extracomunitario, è ansioso di ricevere una email che gli dica se egli è stato ammesso al corso di formazione professionale organizzato dall'Associazione Industriali. Ali stima la probabilità condizionata di ricevere l'email in ogni giorno della settimana, dato che egli sia ammesso o non ammesso, come riportato sopra. Ali stima che la probabilità di essere ammesso sia 0.6.
- (a) Qual è la probabilità che l'email sia ricevuta lunedì?
 (b) Qual è la probabilità condizionata che l'email sia ricevuta martedì, sapendo che non è stato ricevuto lunedì? (1)
 (c) Se l'email non arriva entro mercoledì, qual è la probabilità condizionata che Ali venga ammesso?
 (d) Qual è la probabilità condizionata di essere ammesso se l'email arriva giovedì?
 (e) Qual è la probabilità condizionata di essere ammesso se l'email non arriva questa settimana?
- *53. Un sistema in parallelo funziona quando almeno una delle sue componenti funziona. Consideriamo un sistema in parallelo con n componenti e supponiamo che ogni componente funzioni indipendentemente con probabilità $\frac{1}{2}$. Determinare la probabilità condizionata che la prima componente funzioni sapendo che il sistema funziona.
54. Dire in ogni singolo punto da (a) a (e) se gli eventi E ed F si possono considerare indipendenti, motivando la risposta.
- (a) E è l'evento "un manager ha gli occhi blu" e F è l'evento "la sua segretaria ha gli occhi blu".
 (b) E è l'evento "un professore possiede una macchina" e F è l'evento che egli appare nell'elenco telefonico.
 (c) E è l'evento "un uomo è alto meno di 1.80 m" e F è l'evento che egli pesa più di 120 kg.
 (d) E è l'evento "una donna vive negli Stati Uniti" e F è l'evento che essa vive nell'emisfero Ovest.
 (e) E è l'evento "pioverà domani" e F è l'evento "pioverà dopodomani".
- *55. In una classe ci sono 4 matricole maschi, 6 matricole femmine e 6 maschi del secondo anno. Quante ragazze del secondo anno devono essere presenti se sesso e classe devono essere indipendenti quando uno studente è scelto a caso? 9
56. Supponiamo di raccogliere continuamente delle figurine tra m tipi diversi. Supponiamo anche che ogni volta che si ha una figurina, questa sia di tipo i con probabilità p_i , $i = 1, \dots, m$. Supponiamo di aver appena raccolto la figurina n -esima. Qual è la probabilità che si tratti di un tipo nuovo di figurina?
- SUGGERIMENTO: Condizionare sul tipo di questa figurina.
- *57. Un modello semplificato per le variazioni del prezzo delle azioni presume che ogni giorno il prezzo delle azioni salga di una unità con probabilità p o scenda di una unità con probabilità $1 - p$. Si assume che le variazioni del prezzo in giorni diversi siano indipendenti.
- (a) Qual è la probabilità che il prezzo delle azioni torni a quello di partenza dopo 2 giorni?
 (b) Qual è la probabilità che il prezzo delle azioni salga di una unità dopo 3 giorni?

69. Un particolare organismo possiede un paio di ciascuno di 5 geni diversi (che indichiamo con le prime 5 lettere dell'alfabeto). Ogni gene può presentarsi in due forme diverse (che indichiamo con le maiuscole e le minuscole). Le lettere maiuscole sono associate al gene dominante, nel senso che se l'organismo possiede la coppia di geni xX , allora egli presenterà esteriormente la caratteristica del gene X . Ad esempio, se X sta per gli occhi castani e x per gli occhi azzurri, allora un individuo che ha la coppia di geni XX o xX avrà gli occhi castani. La manifestazione fisica dei caratteri genetici di un organismo è chiamata il suo fenotipo, mentre il suo patrimonio genetico è chiamato il genotipo. (Così due organismi con genotipi rispettivi aA, bB, cc, dD, ee e AA, BB, cc, DD, ee hanno genotipi diversi ma lo stesso fenotipo.) In un incrocio tra due organismi ognuno contribuisce, a caso, con un gene di ognuna delle coppie. I 5 contributi di un organismo (uno per ciascuno dei 5 tipi) vengono supposti fra loro indipendenti; essi sono anche indipendenti dai contributi del compagno/a. In un incontro tra organismi che hanno i genotipi aA, bB, cC, dD, eE e aa, bb, cc, Dd, ee qual è la probabilità che la progenie assomigli (i) a livello di fenotipo (ii) a livello di genotipo
- (a) al primo genitore;
 (b) al secondo genitore;
 (c) a uno dei genitori;
 (d) a nessun genitore?
70. C'è un 50% di possibilità che la regina sia portatrice del gene dell'emofilia. Se è una portatrice, ogni principe ha il 50% di possibilità di avere l'emofilia. Se la regina ha avuto 3 principi sani, qual è la probabilità che la regina sia una portatrice? Se nasce un quarto principe, qual è la probabilità che egli sia malato di emofilia?
71. Supponiamo che un test per il cancro sia accurato al 95% sia tra i malati che tra i sani. Se lo 0.4% della popolazione è formata da malati di cancro, calcolare la probabilità che una persona che effettua il test abbia il cancro, sapendo che il test lo afferma.
72. Un consiglio cittadino formato da 7 membri ha un comitato direttivo formato da 3 membri. Le nuove proposte legislative passano prima per il comitato direttivo e vengono inoltrate all'intero consiglio se almeno 2 dei 3 membri del comitato approvano la proposta. Una volta che la proposta passa all'intero consiglio, ci vuole la maggioranza dei voti (almeno 4) per farla passare. Consideriamo ora un nuovo provvedimento legislativo e supponiamo che ogni membro del comitato direttivo lo approvi, indipendentemente, con probabilità p . Qual è la probabilità che il voto di un membro del comitato direttivo sia decisivo, nel senso che se il voto della persona in questione fosse l'opposto, allora il provvedimento avrebbe un esito opposto? Qual è la probabilità corrispondente per un membro del consiglio che non fa parte del comitato direttivo?
- *73. Supponiamo che ogni figlio di una coppia possa essere ugualmente un maschio o una femmina indipendentemente dalla distribuzione dei sessi degli altri figli della coppia. Per una coppia che ha 5 figli, calcolare la probabilità degli eventi che seguono:
- (a) Tutti i figli siano dello stesso sesso.
 (b) I 3 più vecchi siano maschi e le altre femmine.
 (c) Vi siano esattamente 3 maschi.
 (d) I due più vecchi siano femmine.
 (e) Vi sia almeno una femmina.
74. A e B alternano il lancio di un paio di dadi, e si fermano non appena A fa 9 o B fa 6. Supponendo che A inizi il gioco, determinare la probabilità che A faccia il lancio finale.
75. In un certo villaggio la tradizione vuole che il figlio maschio più vecchio e sua moglie si prendano cura dei loro genitori quando invecchiano. Recentemente però, le donne del villaggio non vogliono assumersi responsabilità, e non vedono di buon occhio il matrimonio con un figlio maschio più anziano.
- (a) Se ogni famiglia del villaggio ha due figli, qual è la proporzione dei figli maschi più anziani tra tutti i figli maschi?

- (b) Stessa domanda se ogni famiglia del villaggio ha tre figli. Supporre che ogni figlio sia, indipendentemente e con uguale probabilità, un maschio o una femmina.
76. Supponiamo che E ed F siano due eventi disgiunti di un esperimento. Provare che effettuando delle prove indipendenti dell'esperimento, allora E si realizza prima di F con probabilità $P(E)/[P(E) + P(F)]$.
77. Si consideri una sequenza infinita di prove indipendenti, dove ogni prova ha tre esiti ugualmente probabili: 1, 2 o 3. Sapendo che il 3 è l'ultimo numero ad apparire nelle prove, determinare la probabilità condizionata che
- (a) la prima prova abbia esito uguale a 1;
 (b) le due prime prove abbiano entrambe esito uguale a 1.
78. A e B effettuano una serie di giochi. Ogni gioco è vinto indipendentemente da A con probabilità p e da B con probabilità $1 - p$. Essi si fermano quando il numero di vincite totali di uno dei due giocatori è uguale a due più di quello dell'altro giocatore. Il giocatore con il maggior numero di vincite è dichiarato il vincitore della partita.
- (a) Determinare la probabilità che si effettuino 4 giochi.
 (b) Determinare la probabilità che A sia il vincitore della partita.
79. Lanciando successivamente una coppia di dadi non truccati, qual è la probabilità di ottenere due 7 prima di 6 numeri pari?
80. Dei giocatori hanno uguale capacità; nelle partite considerate qui ogni concorrente ha probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere su un altro. Al primo turno un gruppo di 2^n giocatori è suddiviso in coppie di avversari, a caso. Al secondo turno i 2^{n-1} vincitori sono suddivisi in coppie a caso, e così via, finché rimane un unico vincitore. Consideriamo due concorrenti A e B , e definiamo gli eventi $A_i, i \leq n, E$ come

A_i : A gioca in esattamente i turni;

E : A e B non giocano mai insieme.

- (a) Determinare $P(A_i), i = 1, \dots, n$.
 (b) Trovare $P(E)$.
 (c) Sia $P_n = P(E)$. Mostrare che

$$P_n = \frac{1}{2^n - 1} + \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_{n-1}$$

e utilizzare ciò per controllare la risposta ottenuta in (b).

SUGGERIMENTO: Trovare $P(E)$ condizionando su quale degli eventi $A_i, i = 1, \dots, n$ si realizza. Per semplificare la risposta utilizzare l'identità algebrica

$$\sum_{i=1}^{n-1} ix^{i-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$$

Un altro approccio per risolvere il problema consiste nell'osservare che vi sono in totale $2^n - 1$ partite giocate.

- (d) Spiegare perché vengono giocate $2^n - 1$ partite. Numeriamo queste partite e sia B_i l'evento " A e B giocano fra loro nella partita $i, i = 1, \dots, 2^n - 1$."
- (e) Cos'è $P(B_i)$?
 (f) Utilizzare (e) per determinare $P(E)$.
81. Un investitore in borsa ha delle quote in azioni che valgono 25. L'investitore ha deciso che deve vendere queste azioni se il loro valore scende sotto 10 euro o sale sopra 40 euro. Se i cambi di prezzo sono 1 euro in alto con probabilità 0.55 o un euro in giù con probabilità 0.45, e i successivi cambi sono indipendenti, qual è la probabilità che la strategia dell'investitore sia vincente?

82. A e B lanciano una moneta. A inizia e continua a lanciare finché esce croce. A questo punto B inizia a lanciare la moneta e continua a lanciare finché esce croce; poi A ricomincia e così via. Sia P_1 la probabilità che la moneta dia testa quando è lanciata da A , e P_2 quando è lanciata da B . Determinare la probabilità che A vinca, nel caso in cui il vincitore sia il primo a fare
- 2 teste di fila;
 - un totale di 2 teste;
 - 3 teste di fila;
 - un totale di 3 teste.
83. Il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce bianche, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce bianche. Si lancia una volta una moneta non truccata. Se esce testa, il gioco continua lanciando il dado A ; se esce croce, si lancia il dado B .
- Mostrare che la probabilità che la faccia sia rossa a ogni lancio è $\frac{1}{2}$.
 - Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che venga rosso al terzo lancio?
 - Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A ?
84. Un'urna contiene 12 palline, 4 delle quali sono bianche. Tre giocatori - A, B, C - successivamente estraggono una pallina dall'urna: prima A , poi B , poi C , poi A e così via. Il vincitore è colui che estrae per primo una pallina bianca. Determinare la probabilità di vincere per ogni giocatore se
- ogni pallina è rimpiazzata dopo l'estrazione;
 - le palline estratte non sono rimpiazzate.
85. Ripetere l'Esercizio 84 quando ciascuno dei 3 giocatori estrae da una propria urna. Si supponga cioè che vi siano 3 diverse urne di 12 palline delle quali 4 sono bianche.
86. Sia $S = \{1, 2, \dots, n\}$ e si supponga che A e B siano, indipendentemente, due a caso dei 2^n sottoinsiemi di S (incluso l'insieme vuoto e S stesso).
- Provare che

$$P\{A \subset B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

SUGGERIMENTO: Sia $N(B)$ il numero di elementi di B . Utilizzare la formula

$$P\{A \subset B\} = \sum_{i=0}^n P\{A \subset B | N(B) = i\} P\{N(B) = i\}$$

- Mostrare che $P\{AB = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
87. Torniamo all'Esempio 2a, supponendo però ora che quando le chiavi si trovano in una data tasca, ci sia il 10% di possibilità che la ricerca in quella tasca non permetta di trovare la chiave. Siano D ed S , rispettivamente, gli eventi che le chiavi si trovino nella tasca destra della giacca e che si trovino nella tasca sinistra. Inoltre, sia S_D l'evento che una ricerca nella tasca destra della giacca permetta di trovare le chiavi, e sia I_S l'evento che una ricerca nella tasca sinistra della giacca non abbia successo, cioè che non permetta di trovare le chiavi. Determinare $P(S_D | I_S)$, la probabilità condizionata che una ricerca nella tasca destra permetta di trovare le chiavi sapendo che una ricerca nella tasca sinistra è stata vana, in due modi diversi:
- utilizzando l'identità

$$P(S_D | I_S) = \frac{P(S_D I_S)}{P(I_S)}$$

determinando $P(S_D | I_S)$ condizionando sul fatto che le chiavi si trovino o meno nella tasca destra, e determinando $P(I_S)$ condizionando sul fatto che le chiavi si trovino o meno nella tasca sinistra;

- utilizzando l'identità

$$P(S_D | I_S) = P(S_D | D I_S) P(D | I_S) + P(S_D | D^c I_S) P(D^c | I_S)$$

88. Nell'Esempio 5e, qual è la probabilità condizionata che la moneta i -esima sia stata scelta sapendo che nelle prime n prove è uscita testa?
89. Nell'Esempio 5e, sono indipendenti gli esiti dei lanci successivi? Spiegare.
90. Una persona giudicata da una corte formata da 3 giudici è dichiarata colpevole se almeno 2 giudici votano la colpevolezza. Supponiamo che quando l'imputato è effettivamente colpevole, ogni giudice voti indipendentemente la colpevolezza con probabilità 0.7, mentre quando è innocente, questa probabilità scende a 0.2. Se il 70% degli imputati è colpevole, calcolare la probabilità condizionata che il giudice numero 3 voti la colpevolezza sapendo che
- i giudici 1 e 2 votano la colpevolezza;
 - i giudici 1 e 2 votano un colpevole e un innocente;
 - i giudici 1 e 2 entrambi votano per l'innocenza.
- Sia $E_i, i = 1, 2, 3$ l'evento "il giudice i vota per la colpevolezza". Questi eventi sono indipendenti? Sono condizionatamente indipendenti? Spiegare.
91. Supponiamo di realizzare n prove indipendenti, ciascuna delle quali ha come esiti possibili 0, 1 o 2 con probabilità rispettive p_0, p_1 , e p_2 , $\sum_{i=0}^2 p_i = 1$. Determinare la probabilità che gli esiti 1 e 2 si realizzino almeno una volta.

ESERCIZI TEORICI

- Se $P(A) > 0$ mostrare che

$$P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$$

- Se $A \subset B$, esprimere le probabilità che seguono nel modo più semplice possibile:

$$P(A|B), \quad P(A|B^c), \quad P(B|A), \quad P(B|A^c)$$

- Si considera una comunità scolastica formata da m famiglie, n_i delle quali hanno i figli, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^k n_i = m$. Considerare i due seguenti metodi per scegliere un bimbo.

- Scegliere una delle m famiglie a caso e poi scegliere a caso un bimbo da quella famiglia.
- Scegliere a caso uno degli $\sum_{i=1}^k i n_i$ bimbi.

Provare che il metodo 1 conduce più frequentemente del metodo 2 alla scelta di un primogenito.

SUGGERIMENTO: Nel risolvere il problema è utile mostrare che

$$\sum_{i=1}^k i n_i \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{j} \geq \sum_{i=1}^k n_i \sum_{j=1}^k n_j$$

Per farlo, si scrivano le formule in termini di sommatorie sugli indici (i, j) , il coefficiente del termine $n_i n_j$ è maggiore nell'espressione a sinistra che in quella a destra.

- Una palla si trova in una tra n scatole, e si trova nella scatola i con probabilità P_i . Se la palla è nella scatola i , una ricerca nella scatola permette di scovarla con probabilità α_i .

Provare che la probabilità condizionata che la palla sia nella scatola j , sapendo che la ricerca nella scatola i non ha permesso di individuarla è data da

$$\frac{P_j}{1 - \alpha_i P_i} \quad \text{se } j \neq i$$

$$\frac{(1 - \alpha_i) P_i}{1 - \alpha_i P_i} \quad \text{se } j = i$$

5. (a) Provare che se E e F sono disgiunti, allora

$$P(E|E \cup F) = \frac{P(E)}{P(E) + P(F)}$$

(b) Provare che se gli eventi $E_i, i \geq 1$ sono a due a due disgiunti allora

$$P\left(E_j \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \frac{P(E_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)}$$

6. Provare che se E_1, E_2, \dots, E_n sono degli eventi indipendenti, allora

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - P(E_i)]$$

7. (a) Un'urna contiene n palline bianche ed m palline nere. Le palline sono estratte una alla volta finché restano solo quelle di uno stesso colore. Mostrare che restano quelle bianche con probabilità $n/(n + m)$.

SUGGERIMENTO: Immaginare che l'esperimento continui finché finiscono tutte le palline, considerare l'ultima pallina estratta.

(b) Un laghetto contiene 3 specie distinte di pesce, che chiamiamo pesce Rosso, Blu e Giallo. Ci sono r pesci Rossi, b Blu, g Gialli. Supponiamo di rimuovere dal laghetto in modo casuale (cioè, in ogni selezione, i pesci che restano hanno la stessa probabilità di essere prelevati). Qual è la probabilità che i pesci Rossi siano i primi a estinguersi?

SUGGERIMENTO: Scrivere che $P\{R\} = P\{RBG\} + P\{RGB\}$, e calcolare le probabilità che compaiono a destra dell'uguaglianza condizionando prima sulle ultime specie che vengono rimosse.

8. Siano A, B, C tre eventi relativi ad un lancio di due dadi.

(a) Se

$$P(A | C) > P(B | C) \quad \text{e} \quad P(A | C^c) > P(B | C^c)$$

provare che $P(A) > P(B)$ oppure fornire un controesempio esibendo degli eventi A, B, C per i quali ciò non è vero.

(b) Se

$$P(A | C) > P(A | C^c) \quad \text{e} \quad P(B | C) > P(B | C^c)$$

provare che $P(AB | C) > P(AB | C^c)$ oppure fornire un controesempio esibendo degli eventi A, B, C per i quali ciò non è vero.

SUGGERIMENTO: Sia C l'evento che la somma dei dadi è 10; sia A l'evento che il primo dado dà 6 e B l'evento che il secondo dado dà 6.

9. Consideriamo due lanci indipendenti di una moneta non truccata. Sia A l'evento "al primo lancio viene testa", B l'evento "al secondo lancio viene testa", e C l'evento "esce la stessa faccia nei due lanci". Mostrare che gli eventi A, B, C sono due a due indipendenti – cioè che A e B sono indipendenti, A e C sono indipendenti, B e C sono indipendenti – ma che non sono far loro indipendenti.

10. Il 2% delle donne di 45 anni che partecipano ad un programma di prevenzione di routine hanno il tumore al seno. Il 90% di quelle che hanno un tumore al seno hanno delle mammografie con esito positive. L'8% delle donne che non hanno un tumore al seno hanno ugualmente delle mammografie con esito positivo. Una donna di quell'età ha una mammografia con esito positivo; qual è la probabilità che la stessa abbia un tumore al seno?

11. Si effettuano n lanci indipendenti di una moneta che dà testa con probabilità p . Quanto grande deve essere n affinché la probabilità che venga testa almeno una volta sia maggiore o uguale di $\frac{1}{2}$?

12. Se $0 \leq a_i \leq 1, i = 1, 2, \dots$, mostrare che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1$$

SUGGERIMENTO: Si supponga di lanciare un numero infinito di monete. Sia a_i la probabilità che l' i -esima moneta dia testa, e considerare quando esce la prima testa.

13. La probabilità che venga testa con una data moneta è p . Si supponga che A cominci e continui a lanciare finché viene croce, e a quel punto passa la mano a B che comincia a lanciare. Poi B continua a lanciare finché viene croce, a quel punto il gioco ripassa ad A ecc. Sia $P_{n,m}$ la probabilità che A accumuli n teste prima che B ne accumuli m . Provare che

$$P_{n,m} = pP_{n-1,m} + (1 - p)(1 - P_{m,n})$$

*14. Supponete di giocare contro un avversario illimitatamente ricco e che a ogni stadio vincete o perdete 1 unità con, rispettivamente, probabilità p e $1 - p$. Mostrare che la probabilità di andare in rovina è

$$\begin{matrix} 1 & \text{se } p \leq \frac{1}{2} \\ (q/p)^i & \text{se } p > \frac{1}{2} \end{matrix}$$

dove $q = 1 - p$ e i è il vostro capitale iniziale.

15. Si effettuano delle prove indipendenti in ciascuna delle quali il successo ha probabilità p , finché si ottengono r successi. Provare che la probabilità che ciò necessiti esattamente n tentativi è

$$\binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Utilizzare questo risultato per risolvere il problema dei punti (Esempio 4j).

SUGGERIMENTO: Affinché siano necessari n tentativi per ottenere r successi, quanti successi ci devono essere nelle prime $n - 1$ prove?

16. Delle prove indipendenti nelle quali il successo ha probabilità p e il fallimento ha probabilità $1 - p$ sono chiamate prove di Bernoulli. Sia P_n la probabilità che n prove di Bernoulli producano un numero pari di successi (0 è considerato pari).

Provare che

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1} \quad n \geq 1$$

e utilizzate questa per provare (per induzione) che

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

17. Si realizzino n prove indipendenti, nelle quali la prova i ha successo con probabilità $1/(2i + 1)$. Sia P_n la probabilità che il numero totale di successi sia un numero dispari.
- (a) Determinare P_n per $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
 - (b) Fare una congettura per la formula generale per P_n .
 - (c) Scrivere una formula che esprime P_n in termini di P_{n-1} .
 - (d) Verificare che la formula ipotizzata in (b) soddisfa la relazione di ricorrenza trovata al punto precedente. Ciò prova che la congettura è corretta, dato che una tale relazione di ricorrenza ha un'unica soluzione.

18. Sia Q_n la probabilità che in n lanci di una moneta non vi sia una serie di 3 teste consecutive. Mostrare che

$$Q_n = \frac{1}{2}Q_{n-1} + \frac{1}{4}Q_{n-2} + \frac{1}{8}Q_{n-3}$$

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1$$

Determinare Q_8 .

SUGGERIMENTO: Condizionare sulla prima croce.

19. Si consideri il problema della rovina del giocatore, eccetto il fatto che A e B decidono di non effettuare più di n giochi. Sia $P_{n,i}$ la probabilità che A termini il gioco con tutti i soldi quando A inizia con i e B inizia con $N - i$. Trovare una relazione che esprima $P_{n,i}$ in termini di $P_{n-1,i+1}$ e $P_{n-1,i-1}$; calcolare inoltre $P_{7,3}$, $N = 5$.
20. Si considerino due urne, ciascuna contenente delle palline sia bianche sia nere. La probabilità di estrarre una pallina bianca dalla prima e dalla seconda urna è, rispettivamente, p e p' . Le palline sono scelte in modo sequenziale con rimpiazzo come segue: una pallina è estratta dalla prima urna con probabilità α , e dalla seconda con probabilità $1 - \alpha$. Le estrazioni successive sono fatte secondo la regola che quando viene estratta una pallina bianca (e rimpiazzata), la pallina successiva è estratta dalla stessa urna. Mostrare che

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n(p + p' - 1) + 1 - p' \quad n \geq 1$$

e usare questo fatto per provare che

$$\alpha_n = \frac{1 - p'}{2 - p - p'} + \left(\alpha - \frac{1 - p'}{2 - p - p'} \right) (p + p' - 1)^{n-1}$$

Sia P_n la probabilità che la n -esima pallina estratta sia bianca. Determinare P_n . Calcolare poi $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

21. *Il problema del ballottaggio.* In una elezione, il candidato A riceve n voti mentre il candidato B ne riceve m , con $n > m$. Supponendo tutti i $(n + m)!/n!m!$ possibili esiti della votazione ugualmente probabili, sia $P_{n,m}$ la probabilità che A sia sempre in testa nel conteggio dei voti.
- (a) Calcolare $P_{2,1}, P_{3,1}, P_{3,2}, P_{4,1}, P_{4,2}, P_{4,3}$.
 - (b) Determinare $P_{n,1}, P_{n,2}$.
 - (c) Basandosi sui risultati trovati in (a) e (b), fare una congettura sul valore di $P_{n,m}$.
 - (d) Esprimere $P_{n,m}$ in termini di $P_{n-1,m}$ e $P_{n,m-1}$ condizionando su chi riceve l'ultimo voto.
 - (e) Utilizzare (d) per verificare la congettura fatta in (c), dimostrando il risultato per induzione su $n + m$.
22. Un modello semplificato di previsioni metereologiche, suppone che il tempo domani (bello o pioggia) sia lo stesso di oggi con probabilità p . Se il tempo è bello il 1 gennaio, mostrare che P_n , la probabilità che il tempo sia bello nei prossimi n giorni, soddisfa

$$P_n = (2p - 1)P_{n-1} + (1 - p) \quad n \geq 1$$

$$P_0 = 1$$

Provare che

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n \quad n \geq 0$$

23. Una borsa contiene a palline bianche e b palline nere. Le palline vengono scelte con questo metodo:
- 1. Una pallina è scelta a caso e poi scartata.
 - 2. Si sceglie una seconda pallina. Se il suo colore è diverso da quello della pallina precedente, essa viene rimessa nella borsa, e il processo ricomincia dal principio. Se il suo colore invece è uguale, essa viene scartata, e si ricomincia dal passo 2.

In altri termini, le palline vengono estratte e scartate finché avviene un cambio di colore, a quel punto l'ultima pallina è rimessa nell'urna e il processo riparte. Sia $P_{a,b}$ la probabilità che l'ultima pallina nella borsa sia bianca. Provare che

$$P_{a,b} = \frac{1}{2}$$

SUGGERIMENTO: Provarlo per induzione su $k = a + b$.

- *24. In un torneo con n giocatori ognuno di essi gioca con tutti gli altri una sola volta; l'esito di una partita è la vittoria dell'uno e la sconfitta dell'altro. Fissato un intero k , $k < n$, è interessante sapere se è possibile che l'esito del torneo sia tale che in ogni insieme di k giocatori ve ne sia uno che batte ogni membro di questo gruppo. Provare che ciò è possibile se

$$\binom{n}{k} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right]^{n-k} < 1$$

SUGGERIMENTO: Si supponga che i risultati delle partite siano indipendenti e che ogni partita possa essere vinta in ugual modo da uno dei due contendenti. Si numerino i $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di k partecipanti, e sia B_i l'evento che nessuno dei membri del gruppo i batte tutti i contendenti dello stesso gruppo. Usare poi la disuguaglianza di Boole per stimare $P(\cup_i B_i)$.

25. Provare direttamente che

$$P(E|F) = P(E|FG)P(G|F) + P(E|FG^c)P(G^c|F)$$

- 26. Provare che le Formule (5.11) e (5.12) sono equivalenti.
- 27. Estendere la definizione di indipendenza condizionata a più di 2 eventi.
- 28. Provare quanto segue o fornire un controesempio. Se gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti, allora essi sono condizionatamente indipendenti dato F .
- 29. Nell'Esempio 5e mostrare che se viene testa nei primi n lanci allora la probabilità condizionata che i successivi m lanci diano testa è $(n + 1)/(n + m + 1)$.
- 30. Nell'Esempio 5e, supponiamo che i primi n lanci producano r teste e $n - r$ croci. Provare che la probabilità che l' $(n + 1)$ -esimo lancio dia testa è $(r + 1)/(n + 2)$. Servirà provare e usare l'identità

$$\int_0^1 y^n (1 - y)^m dy = \frac{n! m!}{(n + m + 1)!}$$

SUGGERIMENTO: Per provare l'identità, sia $C(n, m) = \int_0^1 y^n (1 - y)^m dy$. Integrando per parti si ottiene

$$C(n, m) = \frac{m}{n+1} C(n+1, m-1)$$

Iniziando con $C(n, 0) = 1/(n+1)$, provare l'identità per induzione su m .

31. Supponiamo che un nostro amico non matematico ma portato per la filosofia affermi che la regola di Laplace della successione è scorretta in quanto può portare a conclusioni ridicole. "Per esempio", dice "se un ragazzino ha 10 anni, il ragazzino ha probabilità $\frac{11}{12}$ di vivere un altro anno. D'altro lato, se il ragazzo ha un nonno di 80 anni, per la regola di Laplace il nonno sopravviverà un altro anno con probabilità $\frac{81}{82}$. Tuttavia ciò è ridicolo. Chiaramente è più probabile che un ragazzo sopravviva un altro anno che suo nonno". Cosa rispondereste al vostro amico?

ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

- In una partita di bridge, Ovest non ha assi. Qual è la probabilità che il suo partner (a) non abbia assi, (b) abbia 2 o più assi? (c) Quali sarebbero le probabilità se Ovest ha esattamente un asso?
- La probabilità che una nuova batteria dell'auto funzioni per più di 20 000 km è 0.8, la probabilità che funzioni per più di 40 000 km è 0.4, e la probabilità che funzioni per più di 60 000 km è 0.1. Se una nuova batteria d'auto funziona ancora dopo 20 000 km, qual è la probabilità che
 - la sua vita totale superi i 40 000 km;
 - la sua vita residua superi i 40 000 km?
- Come si possono inserire in due urne 20 palline, 10 bianche e 10 nere, in modo da massimizzare la probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna scelta a caso?
- L'urna A contiene 2 palline bianche e 1 pallina nera mentre l'urna B contiene 1 pallina bianca e 5 palline nere. Una pallina è scelta a caso dall'urna A e messa nell'urna B . Una pallina è poi estratta dall'urna B . Si tratta di una pallina bianca. Qual è la probabilità che la pallina trasferita fosse bianca?
- Un'urna ha r palline rosse e b palline bianche, che vengono estratte a caso una alla volta (senza reimmissione). Sia R_i l'evento che la i -esima pallina estratta sia rossa. Determinare
 - $P(R_i)$
 - $P(R_5 | R_3)$
 - $P(R_3 | R_5)$
- Un'urna contiene b palline bianche e r palline rosse. Una delle palline è scelta a caso, ma quando essa viene rimessa nell'urna, si aggiungono c palline colorate dello stesso colore. Ora, supponiamo di aver estratto un'altra pallina. Provare che la probabilità che la prima fosse bianca, sapendo che la seconda era rossa, è $b/(b+r+c)$.
- Un amico sceglie a caso due carte, senza rimpiazzo, da un mazzo ordinario di 52 carte. In ognuna delle situazioni che seguono, determinare la probabilità condizionata che entrambe le carte siano assi.
 - Chiedi all'amico se una delle carte era l'asso di picche, e il tuo amico risponde di sì.
 - Chiedi al tuo amico se la prima carta scelta era un asso e il tuo amico risponde di sì.
 - Chiedi al tuo amico se la seconda carta scelta era un asso e il tuo amico risponde di sì.
 - Chiedi al tuo amico se una delle carte scelte era un asso e il tuo amico risponde di sì.
- Provare che

$$\frac{P(H|E)}{P(G|E)} = \frac{P(H)P(E|H)}{P(G)P(E|G)}$$

Supponiamo che prima di avere nuove prove l'ipotesi H sia tre volte più probabile dell'ipotesi G . Se la nuova prova è due volte più probabile quando G è vera che quando H è vera, quale delle due ipotesi è più probabile dopo l'acquisizione della nuova prova?

- Chiedi al tuo vicino di bagnare una pianta malconca durante la tua assenza. Senz'acqua la pianta muore con probabilità 0.8, con l'acqua essa muore con probabilità 0.15. Siete certo al 90% che il vostro vicino si ricorderà di bagnare la pianta.
 - Qual è la probabilità che la pianta sopravviva al vostro ritorno?
 - Se la pianta muore, qual è la probabilità che il vicino si sia dimenticato di bagnarla?
- Si estraggono sei palline scelte a caso da un'urna che contiene 8 palline rosse, 10 palline verdi e 12 palline blu.
 - Qual è la probabilità che venga estratta almeno una pallina rossa?
 - Sapendo che non sono state estratte delle palline rosse, qual è la probabilità condizionata che ci siano esattamente 2 palline verdi tra le sei palline estratte?
- Una batteria di tipo C è carica con probabilità 0.7, mentre una batteria di tipo D è carica con probabilità 0.4. Si prende a caso una batteria da un cassetto che ne contiene 8 di tipo C e 6 di tipo D .
 - Qual è la probabilità che la batteria sia carica?
 - Sapendo che la batteria non è carica, qual è la probabilità condizionata che si tratti di una batteria di tipo C ?
- Maria prende con sé due libri per un viaggio. Supponendo che la probabilità che le piacerà il libro n. 1 sia 0.6, che la probabilità che le piacerà il libro n. 2 sia 0.5, e che la probabilità che le piaceranno entrambi i libri sia 0.4, determinare la probabilità condizionata che le piacerà il libro n. 2 sapendo che non le è piaciuto il libro n. 1.
- Si estraggono a caso delle palline da un'urna che inizialmente contiene 20 palline rosse e 10 palline blu.
 - Qual è la probabilità che vengano estratte tutte le palline rosse prima di tutte quelle blu?
 Supponiamo ora che l'urna contenga inizialmente 20 palline rosse, 10 palline blu e 8 palline verdi.
 - Qual è ora la probabilità che tutte le palline rosse siano estratte prima di tutte quelle blu?
 - Qual è la probabilità che siano estratte prima tutte le palline blu, poi tutte le rosse, poi tutte le verdi?
 - Qual è la probabilità che il gruppo delle palline blu sia il primo dei tre gruppi di palline ad essere rimosso dall'urna?
- Si lancia una moneta che dà testa con probabilità 0.8. A osserva il risultato - testa o croce - e va a riferirlo a B . Tuttavia con probabilità 0.4, A avrà dimenticato il risultato prima di raggiungere B . In questo caso, al posto di ammettere la dimenticanza, A riferisce a B con uguale probabilità che la moneta ha dato testa o che ha dato croce (mentre se lo ricorda, A riferisce a B il risultato corretto).
 - Qual è la probabilità che a B venga detto che la moneta ha dato testa?
 - Qual è la probabilità che venga riferito a B il risultato corretto?
 - Sapendo che è stato detto a B che la moneta ha dato testa, qual è la probabilità che la moneta abbia realmente dato testa?
- In alcune specie di topi, i neri sono dominanti rispetto a quelli marrone. Supponiamo che un topo nero con due genitori neri abbia un fratello marrone.
 - Qual è la probabilità che questo topo sia nero puro (il contrario dell'essere ibrido, con un gene nero e uno marrone)?
 - Supponiamo che quando il topo nero venga incrociato al topo marrone, tutti i 5 nuovi nati siano neri. Ora, qual è la probabilità che il topo fosse un nero puro?

16. (a) Nell'Esercizio 66b, determinare la probabilità che la corrente passi da A a B condizionando a seconda che il relè 1 sia chiuso o meno.
 (b) Determinare la probabilità condizionata che il relè 3 sia chiuso, sapendo che la corrente passa da A a B .
17. Per il sistema k -su- n descritto nell'Esercizio 63, supponiamo che ogni componente lavori indipendentemente con probabilità $\frac{1}{2}$. Determinare la probabilità condizionata che la componente 1 funzioni sapendo che il sistema funziona, quando
 (a) $k = 1, n = 2$;
 (b) $k = 2, n = 3$.
18. Un tale ha inventato un sistema per vincere alla roulette. Quando fa una puntata, lo fa sul rosso, ed egli fa una puntata solo quando la roulette è andata sul nero nei 10 giri precedenti. Egli ritiene di avere buone probabilità di vincere perché la probabilità che il nero esca 11 volte consecutive è assai debole. Cosa pensate di questo sistema?
19. Tre giocatori lanciano simultaneamente delle monete. La moneta lanciata da A (B) [C] dà testa con probabilità P_1 (P_2) [P_3]. La persona che ha un esito diverso dagli altri due viene eliminato. Se non ci sono eliminazioni, i tre uomini procedono e continuano finché qualcuno è eliminato. Qual è la probabilità che A venga eliminato?
20. Supponiamo che una prova abbia n possibili esiti, e che l'esito i avvenga con probabilità $p_i, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1$. Se si osservano due prove indipendenti, qual è la probabilità che il risultato della seconda prova sia maggiore di quello della prima?
21. Se A e B lanciano, rispettivamente, $n + 1$ e n monete non truccate, mostrare che la probabilità che A abbia più teste di B è $\frac{1}{2}$.
- SUGGERIMENTO: Condizionare su quale giocatore ha più teste dopo che ciascuno ha lanciato n monete. (Ci sono tre possibilità.)
22. Provare le seguenti affermazioni o dare dei controesempi:
 (a) Se E è indipendente da F e E è indipendente da G , allora E è indipendente da $F \cup G$.
 (b) Se E è indipendente da F e E è indipendente da G , e $FG = \emptyset$, allora E è indipendente da $F \cup G$.
 (c) Se E è indipendente da F , e F è indipendente da G , e E è indipendente da FG , allora G è indipendente da EF .
23. Siano A e B due eventi che hanno una probabilità positiva. Dire se ciascuno degli asserti che seguono (i) è vero, (ii) è falso, (iii) può essere vero.
 (a) Se A e B sono disgiunti, allora sono indipendenti.
 (b) Se A e B sono indipendenti, allora sono disgiunti.
 (c) $P(A) = P(B) = 0.6$ e A e B sono disgiunti.
 (d) $P(A) = P(B) = 0.6$ e A e B sono indipendenti.
24. Elencare gli eventi che seguono dal più probabile al meno probabile.
 1. Una moneta non truccata dà testa.
 2. Tre prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità 0.8, hanno tutte successo.
 3. Sette prove indipendenti, in ciascuna delle quali il successo ha probabilità 0.9, hanno tutte successo.
25. Due fabbriche locali producono radio. Ogni radio prodotta dalla fabbrica A è difettosa con probabilità 0.05, mentre ogni radio prodotta dalla fabbrica B è difettosa con probabilità 0.01. Supponiamo di aver acquistato due radio prodotte dalla stessa fabbrica, che può essere con uguale probabilità A o B . Se la prima radio testata è difettosa, qual è la probabilità condizionata che anche l'altra lo sia?
26. Provare che se $P(A|B) = 1$, allora $P(B^c|A^c) = 1$.

27. Un'urna contiene inizialmente una pallina rossa e una pallina blu. A ogni tappa si estrae a caso una pallina, e la si rimpiazza con due altre palline dello stesso colore. (Ad esempio, se si estrae prima la pallina rossa, alla estrazione successiva l'urna contiene 2 palline rosse e una pallina blu.) Provare per induzione che la probabilità che vi siano esattamente i palline rosse nell'urna dopo che n estrazioni sono state effettuate è $\frac{1}{n+1}, 1 \leq i \leq n+1$.
28. Un insieme di $2n$ carte, 2 delle quali sono assi, sono distribuite a caso tra due giocatori, ognuno dei quali riceve n carte. Ogni giocatore deve poi dichiarare, uno dopo l'altro, se ha ricevuto o meno un asso. Qual è la probabilità condizionata che il secondo giocatore non abbia assi sapendo che il primo dichiara di averne, quando (a) $n = 2$, (b) $n = 10$, (c) $n = 100$? A che valore converge tale probabilità al tendere di n all'infinito? Perché?
29. Vi sono n tipi di figurine, e ogni figurina acquistata è, indipendentemente dalle figurine già acquistate, di tipo i con probabilità $p_i, \sum_{i=1}^n p_i = 1$.
 (a) Se si acquistano n figurine, qual è la probabilità di riempire l'album di n figurine?
 (b) Si supponga ora che $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$. Sia E_i l'evento che non vi siano figurine di tipo i tra le n figurine acquistate. Applicando il Principio di inclusione/esclusione a $P(\cup_i E_i)$, provare che

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

30. Provare che se E e F sono due eventi qualsiasi allora

$$P(E|E \cup F) \geq P(E|F)$$

SUGGERIMENTO: Calcolare $P(E|E \cup F)$ condizionando su F .

31. C'è il 60% di probabilità che si realizzi l'evento A . Se A non si realizza, c'è un 10% di probabilità che si realizzi l'evento B . Qual è la probabilità che almeno uno dei due eventi A o B si realizzi?

Variabili aleatorie

4.1 VARIABILI ALEATORIE

Capita spesso che studiando un fenomeno aleatorio si sia più interessati a una qualche funzione dei possibili esiti che agli esiti stessi. Per esempio, lanciando due dadi siamo spesso interessati alla somma dei valori dei dadi, piuttosto che ai singoli valori che i dadi hanno dato. Specificatamente, potremmo essere interessati a sapere se si sia realizzato 7 come somma dei due dadi, piuttosto che sapere quale/tra i valori (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) si sia effettivamente verificato. Altrettanto, lanciando una moneta possiamo essere interessati al numero totale di teste che sono uscite, piuttosto che alle esatte sequenze di testa e croce che si possono essere verificate. Queste quantità d'interesse, o più precisamente, queste funzioni a valori reali definite sullo spazio campionario sono note come *variabili aleatorie*.

Dato che il valore di una variabile aleatoria è determinato dall'esito dell'esperimento, possiamo assegnare le probabilità ai possibili valori ottenuti dalla variabile aleatoria.

Esempio 1a. Supponiamo che il nostro esperimento consista nel lanciare 3 monete equilibrate. Se denotiamo con Y il numero di teste che si ottengono, allora Y è una variabile aleatoria che assume i valori 0, 1, 2, 3 con le seguenti probabilità

$$P\{Y = 0\} = P\{(C, C, C)\} = \frac{1}{8}$$

$$P\{Y = 1\} = P\{(C, C, T), (C, T, C), (T, C, C)\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y = 2\} = P\{(C, T, T), (T, C, T), (T, T, C)\} = \frac{3}{8}$$

$$P\{Y = 3\} = P\{(T, T, T)\} = \frac{1}{8}$$

Siccome Y deve assumere uno tra i valori 0, 1, 2 e 3, abbiamo

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^3 \{Y = i\}\right) = \sum_{i=0}^3 P\{Y = i\}$$

che, chiaramente, è in accordo con le precedenti assegnazioni delle probabilità. ■

Esempio 1b. Un agente assicurativo ha due clienti che hanno sottoscritto una assicurazione sulla vita per 100 000 euro ognuno. Sia Y l'evento che il più giovane dei due muoia durante il prossimo anno e sia O l'evento che il più anziano muoia

durante il prossimo anno. Supponiamo che gli eventi Y e O siano tra loro indipendenti, con probabilità, rispettivamente, $P(Y) = 0.05$ e $P(O) = 0.10$. Se con X denotiamo la quantità totale di denaro (in unità di 100 000 euro) che la compagnia potrebbe dover pagare per le due polizze il prossimo anno, allora X è una variabile aleatoria che assume uno dei tre possibili valori 0, 1, 2 con probabilità

$$P\{X = 0\} = P(Y^c O^c) = P(Y^c)P(O^c) = (0.95)(0.9) = 0.855$$

$$P\{X = 1\} = P(YO^c) + P(Y^c O) = (0.05)(0.9) + (0.95)(0.1) = 0.140$$

$$P\{X = 2\} = P(YO) = (0.05)(0.1) = 0.005$$

Esempio 1c. Estraiamo quattro palline a caso senza reinserimento da una scatola che contiene venti palline numerate da 1 a 20. Se X denota il numero più grande tra i quattro estratti, allora X sarà una variabile aleatoria che può assumere i valori 4, 5, ..., 20. Poiché ognuna delle $\binom{20}{4}$ possibili quaterne di palline può essere ugualmente estratta, la probabilità che X assuma ognuno di questi valori è

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{20}{4}}, \quad i = 4, \dots, 20$$

Questo perché il numero di quaterne che fanno sì che $X = i$ è pari al numero di selezioni di quattro palline tra le quali sia presente quella con il numero i e tre numerate da 1 a $i - 1$. Essendoci $\binom{1}{1} \binom{i-1}{3}$ possibili scelte di tali quaterne, da questo si ricava la precedente espressione.

Supponiamo ora che si desideri calcolare $P\{X > 10\}$. Chiaramente un modo per farlo è utilizzare la precedente formula ottenendo

$$P\{X > 10\} = \sum_{i=11}^{20} P\{X = i\} = \sum_{i=11}^{20} \frac{\binom{i-1}{3}}{\binom{20}{4}}$$

Tuttavia, un approccio più diretto per determinare $P\{X > 10\}$ potrebbe essere di considerare

$$P\{X > 10\} = 1 - P\{X \leq 10\} = 1 - \frac{\binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}$$

dove si è utilizzato il fatto che X sarà minore o uguale a 10 se e solo se la quaterna di palline conterrà solo quelle numerate da 1 a 10.

Esempio 1d. Lanciamo ripetutamente una moneta, che abbia probabilità di dare testa pari a p a ogni singolo lancio, fino a che appaia per la prima volta testa oppure si siano fatti n lanci. Se denotiamo con X il numero totale di volte che lanciamo la moneta, allora X è una variabile aleatoria che assume i valori 1, 2, 3, ..., n con le seguenti probabilità

$$P\{X = 1\} = P\{T\} = p$$

$$P\{X = 2\} = P\{(C, T)\} = (1 - p)p$$

$$P\{X = 3\} = P\{(C, C, T)\} = (1 - p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P\{X = n - 1\} = P\{(C, C, \dots, C, T)\} = (1 - p)^{n-2} p$$

$$P\{X = n\} = P\{(C, C, \dots, C, C), (C, C, \dots, C, T)\} = (1 - p)^{n-1}$$

Per controllo, si noti che

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n \{X = i\}\right) = \sum_{i=1}^n P\{X = i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} p(1 - p)^{i-1} + (1 - p)^{n-1}$$

$$= p \left[\frac{1 - (1 - p)^{n-1}}{1 - (1 - p)} \right] + (1 - p)^{n-1}$$

$$= 1 - (1 - p)^{n-1} + (1 - p)^{n-1}$$

$$= 1$$

Esempio 1e. Supponiamo che una raccolta di figurine sia formata da N tipi di figurine distinti (per comodità le chiameremo Figurina 1, Figurina 2, Figurina 3, ...); ogni acquisto di una singola figurina risulta indipendente dai precedenti acquisti e la probabilità di acquistare una figurina di uno qualunque degli N differenti tipi di figurine è equivalente. Una variabile d'interesse è T , il numero di figurine che dobbiamo comprare per completare la raccolta (ovvero ottenere una figurina d'ogni tipo). Piuttosto che derivare direttamente $P\{T = n\}$, iniziamo considerando la probabilità che T sia maggiore di n . Per fare ciò, fissiamo n e definiamo gli eventi A_1, A_2, \dots, A_N nel seguente modo: A_j è l'evento che tra le prime n figurine acquistate non è presente la Figurina $j, j = 1, \dots, N$. Perciò

$$P\{T > n\} = P\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right)$$

$$= \sum_j P(A_j) - \sum_{j_1 < j_2} P(A_{j_1} A_{j_2}) + \dots$$

$$+ (-1)^{k+1} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} P(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_k}) \dots$$

$$+ (-1)^{N+1} P(A_1 A_2 \dots A_N)$$

Ora A_j si verifica se ognuna delle n figurine non è la Figurina j . Siccome ogni figurina acquistata non sarà la Figurina j con probabilità $(N-1)/N$, abbiamo, per l'ipotesi d'indipendenza, che

$$P(A_j) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$$

Anche l'evento $A_{j_1}A_{j_2}$ si verificherà se nessuna tra le prime n figurine sarà la Figurina j_1 o la Figurina j_2 . Quindi, di nuovo per l'indipendenza, vediamo che

$$P(A_{j_1}A_{j_2}) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$$

Lo stesso ragionamento ci porta a provare che

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

e quindi per ogni $n > 0$,

$$\begin{aligned} P\{T > n\} &= N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n - \binom{N}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^n + \binom{N}{3}\left(\frac{N-3}{N}\right)^n - \cdots \\ &\quad + (-1)^N \binom{N}{N-1} \left(\frac{1}{N}\right)^n \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N}\right)^n (-1)^{i+1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

La probabilità che T sia uguale a n può ora ottenersi dai precedenti notando che

$$P\{T > n-1\} = P\{T = n\} + P\{T > n\}$$

o, il che è equivalente,

$$P\{T = n\} = P\{T > n-1\} - P\{T > n\}$$

Un'altra variabile d'interesse è rappresentata dal numero di tipi di figurine distinti presenti tra le prime n figurine acquistate. Chiamiamo questa variabile aleatoria D_n . Per calcolare $P\{D_n = k\}$, iniziamo fissando un insieme particolare di k tipi di figurine distinti e determiniamo la probabilità che questo insieme costituisca l'insieme di k tipi di figurine distinti presenti tra le prime n della raccolta. Ora, perché questa avvenga, è necessario e sufficiente che delle prime n figurine acquistate

A: ognuna sia di uno di questi k tipi.

B: ognuno di questi k tipi sia presente.

Ora, ogni figurina acquistata sarà di uno dei k tipi fissati con probabilità pari a k/N , e così A si verificherà con probabilità $(k/N)^n$. Inoltre, se supponiamo che una figurina sia di uno dei k tipi considerati, è facile vedere che con uguale probabilità sarà di uno qualsiasi dei k tipi. Perciò la probabilità condizionata dell'evento B dato l'evento A è uguale alla probabilità che in un insieme di n figurine,

ognuna delle quali ha uguale probabilità di essere di uno dei k tipi fissati, sia presente una sotto-raccolta completa formata dai k tipi fissati. Ma questa è esattamente la probabilità che sia sufficiente acquistare un numero di figurine minore o uguale a n per concludere una raccolta formata da k tipi diversi di figurine. Questo numero è ottenibile dalla Formula (1.2) sostituendo a N il valore k . Quindi vediamo che

$$\begin{aligned} P(A) &= \left(\frac{k}{N}\right)^n \\ P(B|A) &= 1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1} \end{aligned}$$

Per concludere, notiamo che ci sono $\binom{N}{k}$ possibili scelte del particolare insieme di k tipi di figurine e quindi

$$\begin{aligned} P\{D_n = k\} &= \binom{N}{k} P(AB) \\ &= \binom{N}{k} \left(\frac{k}{N}\right)^n \left[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k-i}{k}\right)^n (-1)^{i+1} \right] \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Siccome dobbiamo acquistare almeno N figurine per completare la collezione, abbiamo che $P\{T > n\} = 1$ se $n < N$. Perciò, dalla Formula (1.2) otteniamo l'interessante identità combinatoria che per n e N numeri interi $1 \leq n < N$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N}\right)^n (-1)^{i+1} = 1$$

che può essere scritta come

$$\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N}\right)^n (-1)^{i+1} = 0$$

o, dopo aver moltiplicato per $(-1)^N N^n$ e posto $j = N - i$,

$$\sum_{j=1}^N \binom{N}{j} j^n (-1)^{j-1} = 0 \quad 1 \leq n < N$$

Data una variabile aleatoria X , la funzione F definita da

$$F(x) = P\{X \leq x\} \quad -\infty < x < \infty$$

è detta la *funzione di distribuzione* (o di ripartizione) di X . La funzione di distribuzione rappresenta, per ogni valore x , la probabilità che la variabile aleatoria sia minore o uguale a x .

Supponiamo che $a \leq b$. Poiché l'evento $\{X \leq a\}$ è contenuto nell'evento $\{X \leq b\}$, segue che $F(a)$, la probabilità del primo evento, è minore o uguale a $F(b)$, la probabilità del secondo evento. In altre parole, $F(x)$ è una funzione non decrescente in x . Ulteriori proprietà della funzione di distribuzione saranno presentate nella Sezione 4.9.

4.2 VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

Una variabile aleatoria che possa assumere un'infinità al più numerabile di valori è detta discreta. Per una variabile aleatoria discreta X , definiamo la *densità discreta* $p(a)$ di X come

$$p(a) = P\{X = a\}$$

La densità discreta $p(a)$ è positiva per non più di un'infinità al più numerabile di valori di a . Quindi, se X assume i valori x_1, x_2, \dots , allora

$$p(x_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p(x) = 0 \quad \text{altrimenti}$$

Poiché X deve assumere almeno uno dei valori x_i , abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Può risultare istruttivo rappresentare la densità discreta in forma grafica ponendo i valori x_i in ascissa e quelli della funzione $p(x_i)$ in ordinata. Per esempio, se la densità discreta di X vale

$$p(0) = \frac{1}{4} \quad p(1) = \frac{1}{2} \quad p(2) = \frac{1}{4}$$

la possiamo rappresentare graficamente come in Figura 4.1. In maniera analoga, il grafico della densità discreta di una variabile aleatoria che rappresenti la somma dei valori di due dadi lanciati, è mostrata in Figura 4.2.

Esempio 2a. La densità discreta di una variabile aleatoria X è data da $p(i) = c\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2, \dots$, dove λ è una costante positiva. Si calcoli (a) $P\{X = 0\}$ e (b) $P\{X > 2\}$.

Soluzione Essendo $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$, abbiamo che

$$c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

il che implica, essendo $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, che

$$ce^\lambda = 1 \quad \text{ovvero} \quad c = e^{-\lambda}$$

Perciò

$$(a) P\{X = 0\} = e^{-\lambda}\lambda^0/0! = e^{-\lambda}$$

$$(b) P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$- P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

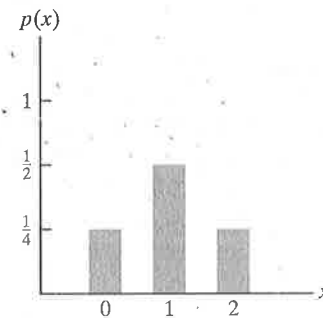


Figura 4.1

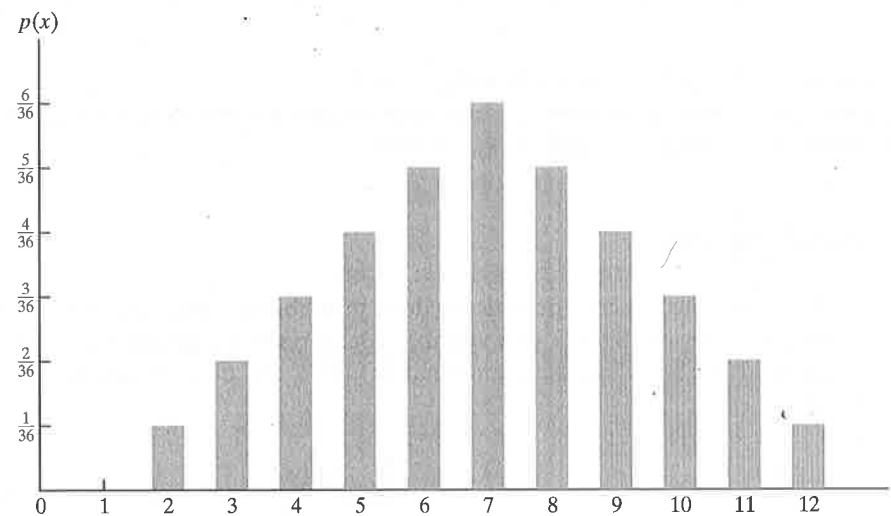


Figura 4.2

La funzione di distribuzione F può essere espressa in funzione di $p(a)$ come

$$F(a) = \sum_{x \leq a} p(x)$$

Se X è una variabile aleatoria discreta che assume i valori x_1, x_2, x_3, \dots , dove $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$, allora la sua funzione di distribuzione F è costante a tratti. Ciò significa che il valore di F è costante negli intervalli $[x_{i-1}, x_i)$ e poi ha un salto di ampiezza pari a $p(x_i)$ in x_i . Per esempio, se X ha la densità discreta data da

$$p(1) = \frac{1}{4} \quad p(2) = \frac{1}{2} \quad p(3) = \frac{1}{8} \quad p(4) = \frac{1}{8}$$

allora la sua funzione di distribuzione è data da

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \leq a < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq a < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq a < 4 \\ 1 & 4 \leq a \end{cases}$$

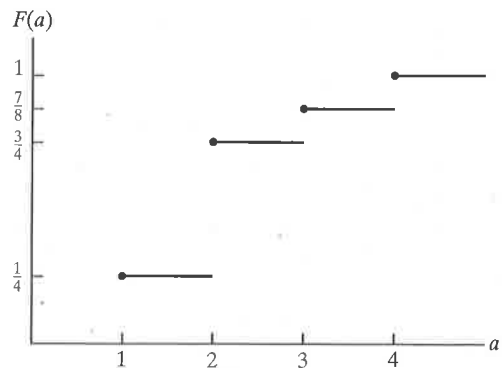


Figura 4.3

Questo è rappresentato graficamente in Figura 4.3.

Si noti che l'ampiezza del salto in corrispondenza dei valori 1, 2, 3, 4 è uguale alla probabilità che X assuma quei particolari valori.

4.3 VALORE ATTESO

Uno dei più importanti concetti del calcolo delle probabilità è quello del valore atteso di una variabile aleatoria. Se X è una variabile aleatoria discreta con densità discreta $p(x)$, il valore atteso (o la speranza matematica) di X , che denoteremo con $E[X]$, è definito da¹

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$$

A parole, il valore atteso di X è la media pesata di tutti i possibili valori che X può assumere, ognuno pesato con la probabilità che X lo assuma. Per esempio, se la densità discreta di X è data da

$$p(0) = \frac{1}{2} = p(1)$$

allora

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

è semplicemente la media aritmetica dei due possibili valori 0 e 1 che X assume. D'altra parte, se invece

$$p(0) = \frac{1}{3} \quad p(1) = \frac{2}{3}$$

allora

$$E[X] = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

¹ Può accadere che $E[X] = +\infty$ se $X \geq 0$ o che $E[X]$ non sia definito: nel seguito supporremo sempre che ciò non accada, il che equivale a supporre che $E[|X|] < +\infty$, ovvero che la serie sia assolutamente convergente [N.d.T.].

è una media pesata dei due possibili valori 0 e 1, dove il peso del valore 1 è doppio rispetto a quello del valore 0, essendo $p(1) = 2p(0)$.

Un'altra motivazione alla precedente definizione di valore atteso è fornita dalla definizione frequentista della probabilità. Questa interpretazione (parzialmente giustificata dalla Legge dei grandi numeri che presenteremo nel Capitolo 8) assume che se ripetiamo infinite volte un medesimo esperimento in maniera indipendente, allora dato ogni evento E , la proporzione delle volte che E si verifica sarà $P(E)$. Ora, consideriamo una variabile aleatoria X che assume uno dei valori x_1, x_2, \dots, x_n con probabilità pari rispettivamente a $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ e pensiamo che X rappresenti il nostro guadagno in un singolo gioco. Questo significa che, con probabilità pari a $p(x_i)$, vinceremo x_i unità di denaro, $i = 1, 2, \dots, n$. Ora, per l'interpretazione frequentista, seguirà che se continuiamo a giocare a questo gioco, allora le proporzioni di volte che vinceremo x_i sarà pari a $p(x_i)$.

Essendo questo vero per ogni $i, i = 1, 2, \dots, n$, abbiamo che il nostro guadagno medio nella singola giocata sarà pari a

$$\sum_{i=1}^n x_i p(x_i) = E[X]$$

Esempio 3a. Si calcoli $E[X]$ quando X rappresenta l'esito del lancio di un dado equilibrato.

Soluzione Essendo $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$, otteniamo che

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

Esempio 3b. Dato un evento A , definiamo la funzione indicatrice I di A come

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } A \text{ si verifica} \\ 0 & \text{se } A^c \text{ si verifica} \end{cases}$$

Si calcoli $E[I]$.

Soluzione Poiché $p(1) = P(A)$, $p(0) = 1 - P(A)$, abbiamo che

$$E[I] = P(A)$$

Cioè, il valore atteso della variabile indicatrice di un evento A è pari alla probabilità che l'evento A si verifichi.

Esempio 3c. Un concorrente di un gioco a quiz deve rispondere a due domande, contenute nella busta 1 e nella busta 2, rispettivamente, ed è libero di scegliere in che ordine rispondere. Se decide di rispondere per prima alla domanda (della busta) i , allora gli sarà consentito di rispondere anche alla seconda domanda (quella $j, j \neq i$) solo se avrà risposto correttamente alla prima. Il concorrente riceve V_i euro se risponde correttamente alla domanda $i, i = 1, 2$. Perciò, per esempio, riceverà $V_1 + V_2$ euro se risponderà correttamente a entrambe le domande. Se la probabilità che conosca la risposta alla domanda i vale P_i , a quale domanda dovrà rispondere prima per massimizzare il guada-

gno atteso? Si supponga che gli eventi $E_i, i = 1, 2$, che lui conosca la risposta alla i -esima domanda, siano tra loro indipendenti.

Soluzione Se la prima domanda alla quale si risponde è la 1, allora il concorrente vincerà

- 0 con probabilità $1 - P_1$
- V_1 con probabilità $P_1(1 - P_2)$
- $V_1 + V_2$ con probabilità P_1P_2

Perciò il suo guadagno atteso in questo caso sarà pari a

$$V_1P_1(1 - P_2) + (V_1 + V_2)P_1P_2$$

Invece, se risponde prima alla domanda 2, il suo guadagno atteso sarà pari a

$$V_2P_2(1 - P_1) + (V_1 + V_2)P_1P_2$$

Perciò sarà più vantaggioso rispondere prima alla domanda 1 solo se

$$V_1P_1(1 - P_2) \geq V_2P_2(1 - P_1)$$

o, equivalentemente, se

$$\frac{V_1P_1}{1 - P_1} \geq \frac{V_2P_2}{1 - P_2}$$

Per esempio, se abbiamo il 60 per cento di probabilità di saper rispondere alla domanda 1, premiata con 200 euro, e ne abbiamo l'80 per cento di rispondere correttamente alla domanda 2, premiata con 100 euro, allora dovremmo rispondere per prima alla domanda 2, essendo in questo caso

$$400 = \frac{(100)(0.8)}{0.2} > \frac{(200)(0.6)}{0.4} = 300$$

Esempio 3d. Una classe di 120 studenti viene condotta a teatro suddivisa in 3 autobus. Nel primo autobus ci sono 36 studenti, nel secondo 40 e 44 nel terzo. Quando gli autobus arrivano davanti al teatro, si sceglie a caso uno tra i 120 studenti. Se X denota il numero di studenti che hanno viaggiato sull'autobus dello studente scelto a caso, si calcoli $E[X]$.

Soluzione Essendo la scelta dello studente casuale, abbiamo che

$$P\{X = 36\} = \frac{36}{120} \quad P\{X = 40\} = \frac{40}{120} \quad P\{X = 44\} = \frac{44}{120}$$

Perciò

$$E[X] = 36\left(\frac{3}{10}\right) + 40\left(\frac{1}{3}\right) + 44\left(\frac{11}{30}\right) = \frac{1208}{30} = 40.2667$$

Il numero medio di studenti presenti su un autobus è pari a $120/3 = 40$. Abbiamo quindi che il numero atteso di studenti sull'autobus dello studente scelto a caso è maggiore rispetto al numero medio di studenti su un singolo autobus. Questo è un fenomeno generale e si verifica perché più studenti sono presenti su un singolo autobus e più sarà probabile che lo studente scelto a caso provenga proprio da quell'autobus. Come conseguenza, agli autobus con più

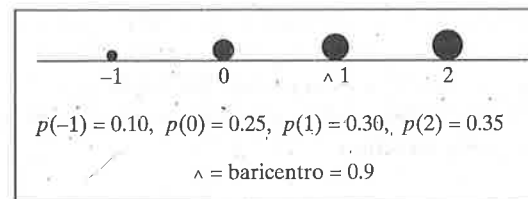


Figura 4.4

studenti a bordo viene assegnato un peso maggiore rispetto a quelli con meno studenti (si veda l'Esercizio di autovalutazione 4).

OSSERVAZIONE. Il concetto di valore atteso è analogo al concetto fisico di *baricentro* di una distribuzione di masse. Consideriamo una variabile aleatoria X che abbia densità discreta $p(x_i), i \geq 1$. Se ora immaginiamo una sbarra di peso trascurabile sulla quale sono poste delle masse $p(x_i), i \geq 1$ nei punti $x_i, i \geq 1$ (si veda la Figura 4.4), allora il punto nel quale la sbarra rimane in equilibrio è noto come il centro di gravità. Per gli studenti in possesso delle nozioni base della statica, risulta immediato verificare che questo punto è esattamente $E[X]$.

4.4 VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE ALEATORIA

Supponiamo di avere una variabile aleatoria discreta X e la sua densità discreta, e di voler calcolare il valore atteso di una qualche funzione di X , diciamo $g(X)$. Come lo possiamo fare? Un modo è il seguente: essendo $g(X)$ stessa una variabile aleatoria discreta, avrà una densità discreta, che possiamo determinare conoscendo quella della variabile X . Una volta determinata la densità discreta di $g(X)$ possiamo calcolare $E[g(X)]$ utilizzando la definizione del valore atteso.

Esempio 4a. Sia X una variabile aleatoria che assuma i valori $-1, 0, 1$ con probabilità rispettivamente pari a

$$P\{X = -1\} = 0.2 \quad P\{X = 0\} = 0.5 \quad P\{X = 1\} = 0.3$$

Si calcoli $E[X^2]$.

Soluzione Sia $Y = X^2$, è immediato verificare che la densità discreta di Y è data da

$$P\{Y = 1\} = P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.5$$

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0\} = 0.5$$

Quindi

$$E[X^2] = E[Y] = 1(0.5) + 0(0.5) = 0.5$$

Il lettore noti che

$$0.5 = E[X^2] \neq (E[X])^2 = 0.01$$

²Per provarlo, dobbiamo dimostrare che $E[X]$ è il punto rispetto al quale è nulla la somma dei momenti dei pesi delle singole porzioni che costituiscono la massa in esame. Cioè dobbiamo provare che $0 = \sum_i (x_i - E[X])p(x_i)$, il che è immediato.

Sebbene il precedente procedimento sia sempre applicabile, esiste un'altra possibile interpretazione di $E[g(X)]$. Se si considera che $g(X)$ è uguale a $g(x)$ quando X è uguale a x , appare ragionevole che $E[g(X)]$ sia la media pesata dei valori $g(x)$, assegnando a $g(x)$ come peso la probabilità che X sia uguale a x . Grazie a queste considerazioni, il successivo risultato appare del tutto intuitivo.

Proposizione 4.1

Se X è una variabile aleatoria discreta, che assume i valori $x_i, i \geq 1$ con probabilità pari a $p(x_i)$, allora per ogni funzione a valori reali g

$$E[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

Prima di dimostrare la proposizione, vediamo come questa sia in accordo con il risultato dell'Esempio 4a. Applicandola infatti a questo esempio, otteniamo

$$\begin{aligned} E[X^2] &= (-1)^2(0.2) + 0^2(0.5) + 1^2(0.3) \\ &= 1(0.2 + 0.3) + 0(0.5) \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

che è in accordo con il risultato provato nell'Esempio 4a.

Dimostrazione della Proposizione 4.1: La dimostrazione della Proposizione 4.1 segue lo stesso ragionamento della precedente verifica, dove avevamo raggruppato assieme tutti i termini di $\sum_i g(x_i)p(x_i)$ che hanno il medesimo valore di $g(x_i)$. Più precisamente, supponiamo che $y_j, j \geq 1$ rappresentino i diversi valori di $g(x_i), i \geq 1$. Allora, raggruppando tutti gli $g(x_i)$ che hanno lo stesso valore, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_i g(x_i)p(x_i) &= \sum_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} g(x_i)p(x_i) \\ &= \sum_j y_j \sum_{i:g(x_i)=y_j} p(x_i) \\ &= \sum_j y_j P\{g(X) = y_j\} \\ &= E[g(X)] \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Esempio 4b. Un prodotto, venduto durante una stagione, porta a un profitto netto di b euro per ogni unità venduta e a una perdita netta di ℓ euro per ogni unità che risulta invenduta alla fine della stagione. Il numero di unità di prodotto che vengono vendute in un negozio durante ogni stagione è rappresentato da una variabile aleatoria dotata di densità discreta $p(i), i \geq 0$. Se il negozio deve immagazzinare all'inizio della stagione la quantità di prodotto che ritiene di poter vendere, si determini il numero di unità che il negozio dovrebbe immagazzinare per massimizzare il profitto atteso.

Soluzione Denotiamo con X il numero (aleatorio) di unità di prodotto vendute. Se s unità vengono immagazzinate, allora il profitto, detto $P(s)$, può essere espresso come

$$\begin{aligned} P(s) &= bX - (s - X)\ell && \text{se } X \leq s \\ &= sb && \text{se } X > s \end{aligned}$$

Perciò il profitto atteso risulta pari a

$$\begin{aligned} E[P(s)] &= \sum_{i=0}^s [bi - (s - i)\ell]p(i) + \sum_{i=s+1}^{\infty} sbp(i) \\ &= (b + \ell) \sum_{i=0}^s ip(i) - s\ell \sum_{i=0}^s p(i) + sb \left[1 - \sum_{i=0}^s p(i) \right] \\ &= (b + \ell) \sum_{i=0}^s ip(i) - (b + \ell)s \sum_{i=0}^s p(i) + sb \\ &= sb + (b + \ell) \sum_{i=0}^s (i - s)p(i) \end{aligned}$$

Per determinare il valore ottimale di s , studiamo l'andamento del profitto atteso quando facciamo crescere il numero di unità di prodotto di 1, passando perciò da s a $s + 1$. Sostituendo $s + 1$ a s nella precedente formula, otteniamo

$$\begin{aligned} E[P(s + 1)] &= b(s + 1) + (b + \ell) \sum_{i=0}^{s+1} (i - s - 1)p(i) \\ &= b(s + 1) + (b + \ell) \sum_{i=0}^s (i - s - 1)p(i) \end{aligned}$$

Perciò,

$$E[P(s + 1)] - E[P(s)] = b - (b + \ell) \sum_{i=0}^s p(i)$$

Quindi, immagazzinando $s + 1$ unità di prodotto, avremo un miglioramento rispetto a immagazzinare s unità se

$$\sum_{i=0}^s p(i) < \frac{b}{b + \ell} \quad (4.1)$$

Essendo il termine a sinistra della Formula (4.1) crescente in s , mentre il termine a destra risulta costante, seguirà che la disuguaglianza è soddisfatta per tutti i valori $s \leq s^*$, dove s^* sarà il massimo valore di s che soddisfi l'Equazione 4.1. Essendo

$$E[P(0)] < \dots < E[P(s^*)] < E[P(s^* + 1)] > E[P(s^* + 2)] > \dots$$

seguirà che immagazzinare $s^* + 1$ unità di prodotto porta al massimo profitto atteso. ■

Esempio 4c. Utilità. Supponiamo che una persona possa scegliere tra due possibili azioni, ognuna delle quali può dare origine a n conseguenze, che denoteremo con C_1, \dots, C_n . Supponiamo che se scegliamo la prima azione, allora la conseguenza C_i si verificherà con probabilità pari a $p_i, i = 1, \dots, n$; altrimenti, se si sarà scelta la seconda azione, la conseguenza C_i si verificherà con probabilità pari a $q_i, i = 1, \dots, n$, dove $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$. Quanto adesso esporremo può essere usato per determinare quale azione si debba intraprendere. Iniziamo assegnando dei valori numerici alle differenti conseguenze nel seguente modo. Prima di tutto individuiamo le conseguenze più e meno desiderabili e denotiamole con C e c , rispettivamente; assegniamo alla conseguenza c il valore 0 e a quella C il valore 1. Consideriamo ora ognuna delle rimanenti $n - 2$ conseguenze, definite C_i . Per dare un valore a una di queste conseguenze, immaginiamo di avere la possibilità o di ricevere C_i o in alternativa di partecipare a un esperimento aleatorio che ci fa guadagnare la conseguenza C con probabilità u o la conseguenza c con probabilità $1 - u$. Chiaramente la nostra decisione dipenderà dal valore di u . Se $u = 1$, allora l'esperimento avrà come risultato certo C ; poiché C è la conseguenza più desiderabile, certamente preferiremo il risultato dell'esperimento aleatorio a C_i . In maniera opposta, se $u = 0$, allora l'esperimento avrà come esito il meno desiderabile delle conseguenze e perciò all'esperimento preferiremo sempre la conseguenza C_i . Ora, facendo decrescere u dal valore 1 al valore 0, sembra ragionevole supporre che la nostra scelta passerà dall'esito (aleatorio) dell'esperimento alla conseguenza certa C_i in corrispondenza di un particolare valore di soglia, per il quale le due scelte risulteranno indifferenti. Definiamo questa probabilità di "indifferenza" u come il valore da assegnare alla conseguenza C_i . In altre parole, il valore di C_i è la probabilità che rende indifferente ricevere con certezza la conseguenza C_i o partecipare all'esperimento aleatorio che ci dà la conseguenza C con probabilità u e la conseguenza c con probabilità $1 - u$. Chiameremo questa probabilità di indifferenza l'*utilità* della conseguenza C_i e la denoteremo con $u(C_i)$.

Per determinare quale azione sia preferibile fare, abbiamo bisogno di valutarle entrambe. Consideriamo la prima, che avrà come risultato la conseguenza C_i con probabilità pari a $p_i, i = 1, \dots, n$. Possiamo pensare al risultato della nostra azione come a un esperimento a due stadi. Al primo stadio, uno dei valori tra $1, \dots, n$ viene scelto in accordo con le probabilità p_1, \dots, p_n ; se viene scelto il valore i , allora riceviamo la conseguenza C_i . Tuttavia, essendo C_i equivalente a ottenere la conseguenza C con probabilità $u(C_i)$ o la conseguenza c con probabilità $1 - u(C_i)$, seguirà che il risultato dell'esperimento a due stadi è equivalente a un esperimento nel quale si possano ottenere la conseguenza C o la conseguenza c , con probabilità di avere C pari a

$$\sum_{i=1}^n p_i u(C_i)$$

In maniera del tutto analoga. La seconda azione è equivalente a prendere parte a un esperimento nel quale si possano ottenere una tra le due conseguenze C o c , con probabilità di avere C pari a

$$\sum_{i=1}^n q_i u(C_i)$$

Essendo C preferibile a c , seguirà che la prima azione risulta preferibile alla seconda se

$$\sum_{i=1}^n p_i u(C_i) > \sum_{i=1}^n q_i u(C_i)$$

In altre parole, il valore di una azione può essere misurato attraverso il valore atteso dell'utilità delle sue conseguenze e l'azione con la maggiore utilità attesa risulterà preferibile. ■

Un semplice corollario della precedente Proposizione 4.1 è il seguente.

Corollario 4.1

Se a e b sono costanti, allora

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} E[aX + b] &= \sum_{x:p(x)>0} (ax + b)p(x) \\ &= a \sum_{x:p(x)>0} xp(x) + b \sum_{x:p(x)>0} p(x) \\ &= aE[X] + b \end{aligned}$$

Il valore atteso di una variabile aleatoria X , $E[X]$ è anche chiamato la media o il momento di ordine uno della variabile X . La quantità $E[X^n]$, $n \geq 1$, viene detta il momento di ordine n di X . Grazie alla Proposizione 4.1 vale che

$$E[X^n] = \sum_{x:p(x)>0} x^n p(x)$$

4.5 VARIANZA

Data una variabile aleatoria X assieme alla sua funzione di distribuzione F , potrebbe essere estremamente utile poter riassumere le principali proprietà della funzione F in termini di alcune quantità opportunamente definite. Una di queste può essere $E[X]$, il valore atteso di X . Tuttavia, sebbene $E[X]$ fornisca la media pesata di tutti i possibili valori di X , essa non dà alcuna informazione riguardo alla variabilità, o dispersione, di questi valori. Per esempio, sebbene le tre variabili aleatorie W , Y e Z , dotate di densità discreta data rispettivamente da

$$\begin{aligned}
 W &= 0 && \text{con probabilità } 1 \\
 Y &= \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ +1 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \end{cases} \\
 Z &= \begin{cases} -100 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ +100 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

abbiano il medesimo valore atteso pari a 0, è presente una maggiore dispersione nei possibili valori della variabile Y piuttosto che in quelli di W (che è addirittura costante) e nei possibili valori di Z rispetto a quelli di Y .

Siccome ci aspettiamo che X assuma valori disposti attorno al suo valor medio $E[X]$, appare ragionevole misurare la possibile variabilità di X facendo la media della distanza dal valor medio che i possibili valori della variabile X assumono. Una possibilità sarà di considerare la quantità $E[|X - \mu|]$, dove $\mu = E[X]$. Tuttavia, utilizzare questa quantità risulta scomodo da un punto di vista matematico e così si è soliti considerare la media delle differenze al quadrato tra X e il suo valore atteso. Diamo perciò la seguente definizione.

Definizione

Se X è una variabile aleatoria di media μ , allora la varianza di X , che denotiamo con $\text{Var}(X)$, è definita

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$$

Una formula alternativa per $\text{Var}(X)$ si deriva nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\
 &= \sum_x (x - \mu)^2 p(x) \\
 &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) \\
 &= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) \\
 &= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
 &= E[X^2] - \mu^2
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2}$$

A parole, la varianza di X è uguale al valore atteso di X^2 meno il quadrato del suo valore atteso. Questa sarà nella pratica la forma più semplice per calcolare la $\text{Var}(X)$.

Esempio 5a. Si calcoli $\text{Var}(X)$ dove X rappresenta l'esito del lancio di un dado.

Soluzione Avevamo calcolato nell'Esempio 3a che $E[X] = \frac{7}{2}$. Inoltre

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right)(91)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Date due costanti a e b , vale la seguente identità

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Per provarla, poniamo $\mu = E[X]$ e ricordiamo che per il Corollario 4.1 $E[aX + b] = a\mu + b$. Perciò

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - a\mu - b)^2] \\
 &= E[a^2(X - \mu)^2] \\
 &= a^2 E[(X - \mu)^2] \\
 &= a^2 \text{Var}(X)
 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI. (a) Come il valore atteso risulta equivalente al centro di gravità per una distribuzione di masse, così la varianza ha il suo corrispettivo meccanico nel momento d'inerzia.

(b) La radice quadrata della $\text{Var}(X)$ è detta la *deviazione standard*³ di X e la denotiamo con σ_X . Cioè

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Le variabili aleatorie discrete vengono spesso classificate in termini delle loro densità discrete. Nelle prossime sezioni considereremo le più importanti tra queste.

4.6 LE VARIABILI ALEATORIE DI BERNOULLI E BINOMIALI

Supponiamo di eseguire una prova, o un esperimento, i cui possibili esiti possono essere classificati come *successo* o *insuccesso*. Se poniamo $X = 1$ quando l'esito è un successo e $X = 0$ quando questo è un insuccesso, allora la densità discreta di X è data da

$$\begin{aligned}
 p(0) &= P\{X = 0\} = 1 - p \\
 p(1) &= P\{X = 1\} = p
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

dove $p, 0 \leq p \leq 1$, rappresenta la probabilità che la prova abbia avuto successo.

Una variabile aleatoria X è detta una variabile aleatoria di Bernoulli (dal matematico svizzero James Bernoulli) se la sua densità discreta è data dalla Formula (6.1) per un qualche valore $p \in (0, 1)$.

³Rispetto alla varianza, la deviazione standard ha il vantaggio di essere espressa nella stessa unità di misura della variabile aleatoria X [N.d.T.].

Supponiamo ora di eseguire n prove in maniera indipendente, ognuna delle quali abbia come possibili risultati un successo con probabilità p e un insuccesso con probabilità $1 - p$. Se X rappresenta il numero di successi che otteniamo nelle n prove, allora X è detta variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) . Quindi una variabile aleatoria di Bernoulli è semplicemente una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1, p)$.

La densità discreta di una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) è data da

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (6.2)$$

La validità della precedente formula può essere facilmente verificata notando dapprima che ogni particolare successione di n esiti contenenti i successi e $n - i$ insuccessi si verifica, grazie all'ipotesi di indipendenza delle prove, con probabilità pari a $p^i (1-p)^{n-i}$. La Formula (6.2) allora segue dal fatto che ci sono $\binom{n}{i}$ differenti successioni di n esiti contenenti i successi e $n - i$ insuccessi. Questo può essere forse inteso più facilmente, se si nota che ci sono esattamente $\binom{n}{i}$ differenti scelte delle i prove

nelle quali si verifichino i successi. Per esempio, se $n = 4, i = 2$, allora ci sono $\binom{4}{2} = 6$ modi nei quali le quattro prove possono dare come risultato due successi e due insuccessi; infatti gli esiti $(s, s, i, i), (s, i, s, i), (s, i, i, s), (i, s, s, i), (i, s, i, s)$, o (i, i, s, s) , dove l'esito (s, s, i, i) sta a indicare che le prime due prove sono state dei successi, mentre le ultime due degli insuccessi. Siccome ognuno di questi singoli esiti si verifica con probabilità pari a $p^2(1-p)^2$, la probabilità desiderata è pari a $\binom{4}{2} p^2(1-p)^2$.

Per il teorema del binomio, è facile dimostrare che le probabilità della Formula (6.2) danno effettivamente come somma 1; infatti

$$\sum_{i=0}^n p(i) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1$$

Esempio 6a. Lanciamo cinque monete equilibrate. Se gli esiti delle singole monete sono considerati indipendenti, si determini la densità discreta della variabile aleatoria che conta il numero di teste ottenute.

Soluzione Se denotiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di teste (successi) che si ottengono, allora X risulta essere una variabile binomiale di parametri $(n = 5, p = \frac{1}{2})$. Perciò, dalla Formula (6.2)

$$P\{X = 0\} = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$P\{X = 1\} = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X = 3\} = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32}$$

$$P\{X = 4\} = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$$P\{X = 5\} = \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

Esempio 6b. È noto che le viti prodotte da una certa fabbrica presentano un difetto, in maniera indipendente una dall'altra, con probabilità pari a 0.01. La fabbrica vende le viti in confezioni di 10 e sostituisce i pacchetti che contengano più di una vite difettosa. Qual è la percentuale dei pacchetti venduti che la fabbrica dovrà rimpiazzare?

Soluzione Se X è il numero di viti difettose in una confezione di 10, allora X si distribuisce come una variabile aleatoria binomiale di parametri $(10, 0.01)$.

Quindi la probabilità che un pacchetto debba essere sostituito vale

$$1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \binom{10}{0} (0.01)^0 (0.99)^{10} - \binom{10}{1} (0.01)^1 (0.99)^9 \\ \approx 0.004$$

Si ricava perciò che solo lo 0.4 per cento delle confezioni dovrà essere rimpiazzata.

Esempio 6c. Il seguente gioco d'azzardo, noto come la ruota della fortuna, è abbastanza popolare in molte fiere e casinò. Un giocatore scommette su uno dei numeri che vanno dall'1 al 6. Vengono lanciati tre dadi (in realtà si gira una ruota, ma matematicamente è la stessa cosa) e se il numero su cui ha scommesso il giocatore appare i volte, con $i = 1, 2, 3$, allora il giocatore vince i euro. Invece, se il numero su cui ha scommesso non esce su alcun dado, allora il giocatore perde 1 euro. Il gioco è equo per chi scommette? (ovvero, il capitale finale atteso è pari a zero?)

Soluzione Se supponiamo che i dadi siano equilibrati e che il risultato di ognuno dei dadi sia indipendente da quello degli altri due, allora il numero di dadi sui quali otterremo il valore su cui abbiamo scommesso sarà distribuito come una variabile binomiale di parametri $(3, \frac{1}{6})$. Quindi, denotando con X la vincita dello scommettitore, abbiamo

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P\{X = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P\{X = 2\} = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P\{X = 3\} = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

Per determinare se il gioco debba o non debba considerarsi equo per lo scommettitore, calcoliamo il valore atteso $E[X]$. Dalle precedenti probabilità otteniamo che

$$E[X] = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{216} = \frac{-17}{216}$$

Quindi, ripetendo varie volte la scommessa, ci aspettiamo che il giocatore perda 17 euro ogni 216 partite che gioca. ■

Nel prossimo esempio consideriamo la forma più semplice della teoria dell'ereditarietà sviluppata da G. Mendel (1822–1884), illustrata nella Figura 4.5.

Esempio 6d. Una particolare caratteristica (come può essere il colore degli occhi) di una persona viene classificata sulla base di una coppia di geni e supponiamo che d rappresenti un gene dominante e r uno recessivo. Perciò una persona con la coppia di geni dd è puramente dominante, una con rr è puramente recessiva e una con rd è un ibrido. Per ogni coppia di geni, i figli ricevono un gene dal padre e uno dalla madre. Se, relativamente a una particolare caratteristica, 2 genitori ibridi hanno un totale di 4 figli, qual è la probabilità che 3 di questi abbiano la caratteristica esteriore data dal gene dominante?

Soluzione Se supponiamo che ogni figlio abbia uguale probabilità di ricevere uno qualsiasi dei due geni di ognuno dei genitori e in maniera indipendente dagli altri fratelli, la probabilità che un figlio di due genitori ibridi abbia la coppia di geni dd, rr o rd vale, rispettivamente, $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$. Quindi, poiché una persona ha la caratte-

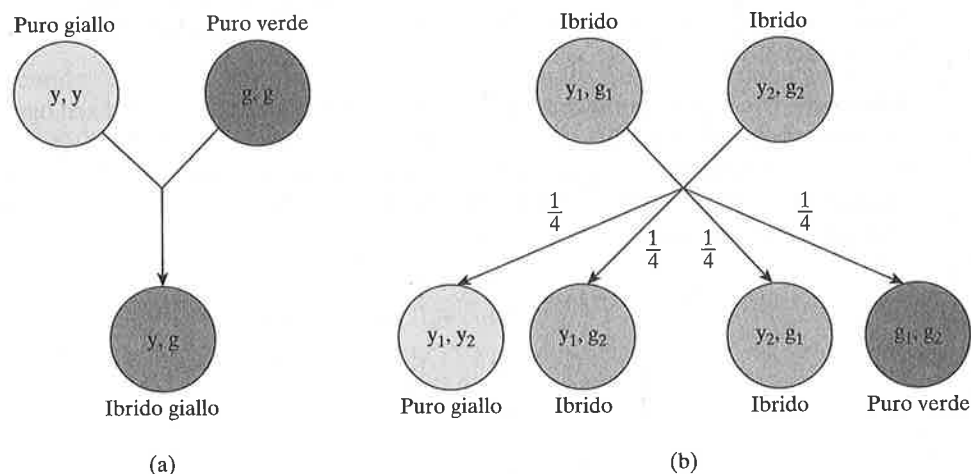


Figura 4.5 (a) Incrocio di un seme puro giallo con uno puro verde; (b) Incrocio di due semi ibridi.

ristica (determinata dal gene) dominante se la coppia di geni è dd oppure rd , segue che il numero di figli con questa caratteristica si distribuisce come una variabile aleatoria binomiale di parametri $(4, \frac{3}{4})$. Perciò la probabilità desiderata vale

$$\binom{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

Esempio 6e. Consideriamo una giuria di un processo formata da 12 persone. L'imputato viene condannato se almeno 8 dei 12 giurati lo ritiene colpevole. Se supponiamo che i giurati agiscano in maniera indipendente l'uno dall'altro e ognuno prenda la decisione corretta con probabilità θ , qual è la probabilità che la giuria emetta un verdetto corretto?

Soluzione Così com'è presentato, il problema non è risolvibile per mancanza di informazioni. Per esempio, se l'accusato è innocente, la probabilità che la giuria prenda una decisione corretta è

$$\sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1 - \theta)^{12-i}$$

mentre, se è colpevole, la probabilità che venga presa la decisione corretta vale

$$\sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1 - \theta)^{12-i}$$

Perciò, se α rappresenta la probabilità che l'accusato sia colpevole, allora, condizionando rispetto all'evento che sia o meno colpevole, otteniamo che la probabilità che la giuria prenda la decisione corretta vale

$$\alpha \sum_{i=8}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1 - \theta)^{12-i} + (1 - \alpha) \sum_{i=5}^{12} \binom{12}{i} \theta^i (1 - \theta)^{12-i}$$

Esempio 6f. Un sistema di comunicazione è formato da n componenti, ognuno dei quali funziona, in maniera indipendente dagli altri, con probabilità pari a p . Il sistema nella sua totalità sarà funzionante se almeno la metà dei suoi componenti lo sarà.

- (a) Per quali valori di p un sistema formato da 5 componenti ha maggiore probabilità di funzionare rispetto a uno formato da soli 3 componenti?
- (b) In generale, quando un sistema di $(2k + 1)$ componenti è migliore di un sistema di $(2k - 1)$ componenti?

Soluzione (a) Il numero di componenti funzionanti è rappresentabile con una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) ; da ciò segue che la probabilità che un sistema a 5 componenti sia funzionante vale

$$\binom{5}{3} p^3 (1 - p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1 - p) + p^5$$

mentre la medesima probabilità per un sistema a 3 componenti vale

$$\binom{3}{2} p^2 (1 - p) + p^3$$

Quindi, il sistema a 5 componenti risulta migliore (più affidabile) se

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

che, semplificando, si riduce a

$$3(p-1)^2(2p-1) > 0$$

ovvero

$$p > \frac{1}{2}$$

(b) In generale, un sistema a $2k+1$ componenti sarà più affidabile di uno a $2k-1$ se (e solo se) $p > \frac{1}{2}$. Per provarlo, consideriamo un sistema a $2k+1$ componenti e sia X la variabile aleatoria che conta quanti dei primi $2k-1$ siano funzionanti. Allora

$$P_{2k+1}(\text{funzionante}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}(1 - (1-p)^2) + P\{X = k-1\}p^2$$

che facilmente si ottiene notando che il sistema a $(2k+1)$ componenti funziona solo se

- (i) $X \geq k+1$;
- (ii) $X = k$ e almeno uno dei rimanenti 2 componenti funziona; oppure
- (iii) $X = k-1$ e entrambi gli ultimi 2 componenti sono funzionanti.

Siccome

$$P_{2k-1}(\text{funzionante}) = P\{X \geq k\} = P\{X = k\} + P\{X \geq k+1\}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} P_{2k+1}(\text{funzionante}) - P_{2k-1}(\text{funzionante}) &= P\{X = k-1\}p^2 - (1-p)^2P\{X = k\} \\ &= \binom{2k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2 \binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^{k-1} \\ &= \binom{2k-1}{k}p^k(1-p)^k[p - (1-p)] \quad \text{poiché } \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ &> 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.6.1 Proprietà delle variabili aleatorie binomiali

Esaminiamo ora alcune proprietà delle variabili aleatorie binomiali di parametri n e p . Per iniziare, calcoliamone il valore atteso e la varianza. Abbiamo

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^n i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^n i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Utilizzando l'identità

$$i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$$

ricaviamo che

$$\begin{aligned} E[X^k] &= np \sum_{i=1}^n i^{k-1} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \quad \text{ponendo } j = i-1 \\ &= np E[(Y+1)^{k-1}] \end{aligned}$$

dove Y è una variabile aleatoria binomiale di parametri $n-1$ e p . Ponendo $k=1$ nella precedente formula otteniamo che

$$E[X] = np$$

Ciò significa che il valore atteso di successi che si verificano in n prove indipendenti quando la probabilità di ogni successo vale p , è pari a np . Ponendo $k=2$ nella precedente formula e utilizzando il valore atteso appena calcolato, abbiamo che

$$E[X^2] = np E[Y+1] = np[(n-1)p + 1]$$

Siccome $E[X] = np$ otteniamo che

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= np[(n-1)p + 1] - (np)^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

In questo modo abbiamo dimostrato la seguente proprietà:

Se X è una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p , allora

$$\begin{aligned} E[X] &= np \\ \text{Var}(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

Il risultato successivo espone nei dettagli come la densità discreta di una variabile binomiale abbia un andamento prima crescente e poi decrescente.

Proposizione 6.1

Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) , dove $0 < p < 1$. Per k che varia da 0 a n , $P\{X = k\}$, la densità discreta, sarà inizialmente strettamente crescente e successivamente strettamente decrescente, raggiungendo il suo valore massimo in corrispondenza del più grande intero k minore o uguale a $(n+1)p$.

Dimostrazione: Consideriamo il rapporto $P\{X = k\}/P\{X = k - 1\}$ e determiniamo per quali valori di k esso risulta maggiore o minore di 1, rispettivamente. Infatti, nel primo caso la funzione risulterà strettamente crescente passando dal valore $k - 1$ al successivo, mentre nel secondo strettamente decrescente. Ora,

$$\begin{aligned} \frac{P\{X = k\}}{P\{X = k - 1\}} &= \frac{\frac{n!}{(n - k)!k!} p^k (1 - p)^{n - k}}{\frac{n!}{(n - k + 1)!(k - 1)!} p^{k - 1} (1 - p)^{n - k + 1}} \\ &= \frac{(n - k + 1)p}{k(1 - p)} \end{aligned}$$

Quindi $P\{X = k\} \geq P\{X = k - 1\}$ se e solo se

$$(n - k + 1)p \geq k(1 - p)$$

o, il che è equivalente, se e solo se

$$k \leq (n + 1)p$$

e la proposizione risulta perciò dimostrata. ♦

Come esempio della Proposizione 6.1, consideriamo la Figura 4.6 in cui viene rappresentato il grafico della densità discreta di una variabile aleatoria binomiale di parametri $(10, \frac{1}{2})$.

Esempio 6g. Alle elezioni presidenziali statunitensi, al candidato che ottiene la maggioranza dei voti in uno stato viene assegnato il totale dei voti dei collegi elettorali di quello stato. Il numero dei collegi elettorali è più o meno proporzionale alla popolazione totale di quello stato; quindi, se la popolazione è di n individui (diremo che lo stato ha quindi taglia n), i voti (dei collegi) elettorali assegnati saranno nc . (In realtà il vero valore è più vicino a $nc + 2$, essendo presenti due collegi elettorali aggiuntivi dovuti alla presenza di 2 senatori per stato). Determiniamo il potere atteso che ha un elettore di uno stato di dimensione n , in una votazione presidenziale testa a testa. Per potere atteso in una elezione con piccolo scarto di voti intendiamo la seguente definizione: un elettore in uno stato di taglia $n = 2k + 1$ sarà decisivo se i voti degli altri $n - 1$ votanti saranno in perfetta parità. (Supponiamo che n sia un numero dispari, ma il caso in cui n sia pari si può risolvere in maniera praticamente uguale). Essendo l'elezione testa a testa, supporremo che ognuno degli altri $n - 1 = 2k$ elettori voti in modo indipendente e che il suo voto possa andare a uno dei due candidati con la medesima probabilità. Quindi, la probabilità che un votante in uno stato di taglia $n = 2k + 1$ sia determinante per l'esito della votazione è uguale alla probabilità che lanciando $2k$ volte una moneta equilibrata si ottenga un ugual numero di testa e di croce. Questo ci dà

$$P\{\text{un votante in uno stato di taglia } 2k + 1 \text{ è decisivo}\}$$

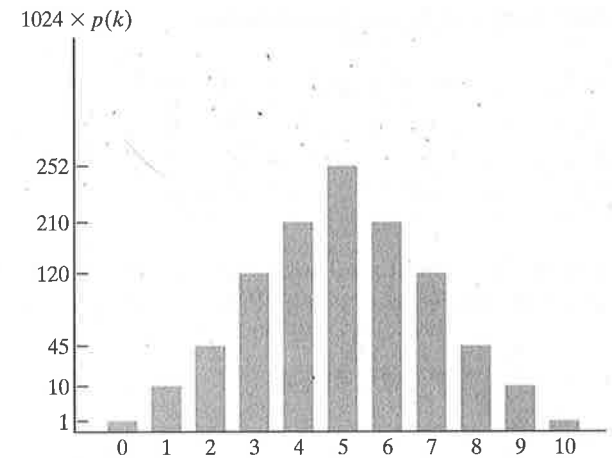


Figura 4.6 Grafico di $p(k) = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$$\begin{aligned} &= \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{(2k)!}{k! k! 2^{2k}} \end{aligned}$$

Per approssimare il precedente valore, utilizziamo la formula di Stirling, la quale stabilisce che per k grande

$$k! \sim k^{k+1/2} e^{-k} \sqrt{2\pi}$$

dove con la notazione $a_k \sim b_k$ indichiamo che il rapporto a_k/b_k tende a 1 quando k tende a infinito. Perciò vediamo che

$$P\{\text{un votante in uno stato di taglia } 2k + 1 \text{ è decisivo}\}$$

$$\sim \frac{(2k)^{2k+1/2} e^{-2k} \sqrt{2\pi}}{k^{2k+1} e^{-2k} (2\pi) 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

Siccome in una simile situazione l'elettore in questione può modificare tutti gli nc voti elettorali, abbiamo che il numero atteso di voti elettorali che un singolo elettore in uno stato di taglia n può modificare, che definiremo il potere atteso, è dato da

$$\begin{aligned} \text{potere atteso} &= nc P\{\text{è decisivo}\} \\ &\sim \frac{nc}{\sqrt{n\pi/2}} \\ &= c\sqrt{2n/\pi} \end{aligned}$$

Quindi, il potere atteso di un elettore in uno stato di taglia n risulta proporzionale alla radice quadrata di n , e quindi nella elezione presidenziale statunitense gli elettori degli stati più popolosi hanno maggior potere rispetto a quelli dei piccoli stati. ■

4.6.2 Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile binomiale

Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) . Per calcolare la sua funzione di distribuzione

$$P\{X \leq i\} = \sum_{k=0}^i \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

è conveniente utilizzare ricorsivamente la seguente relazione che intercorre tra $P\{X = k + 1\}$ e $P\{X = k\}$, già vista nella dimostrazione della Proposizione 6.1:

$$P\{X = k + 1\} = \frac{p}{1-p} \frac{n-k}{k+1} P\{X = k\} \quad (6.3)$$

Esempio 6h. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 6, p = 0.4$. Allora, iniziando da $P\{X = 0\} = (0.6)^6$ e utilizzando ricorsivamente la Formula (6.3), otteniamo

$$\begin{aligned} P\{X = 0\} &= (0.6)^6 \approx 0.0467 \\ P\{X = 1\} &= \frac{4}{6} \frac{6}{1} P\{X = 0\} \approx 0.1866 \\ P\{X = 2\} &= \frac{4}{6} \frac{5}{2} P\{X = 1\} \approx 0.3110 \\ P\{X = 3\} &= \frac{4}{6} \frac{4}{3} P\{X = 2\} \approx 0.2765 \\ P\{X = 4\} &= \frac{4}{6} \frac{3}{4} P\{X = 3\} \approx 0.1382 \\ P\{X = 5\} &= \frac{4}{6} \frac{2}{5} P\{X = 4\} \approx 0.0369 \\ P\{X = 6\} &= \frac{4}{6} \frac{1}{6} P\{X = 5\} \approx 0.0041 \end{aligned}$$

Non è difficile scrivere un programma al computer che, utilizzando la formula ricorsiva (6.3), calcoli la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria binomiale. Per calcolare $P\{X \leq i\}$ il programma deve prima calcolare $P\{X = i\}$ e quindi utilizzare la formula ricorsiva per calcolare in successione $P\{X = i - 1\}, P\{X = i - 2\}$, e così via. Un simile programma si può trovare sul sito web della casa editrice. Per utilizzarlo, si devono inserire inizialmente i valori delle due costanti n e p e il valore i ; quindi il programma calcola le probabilità che una variabile binomiale (n, p) sia uguale a i e sia minore o uguale a i .

Esempio 6i. Sia X è una variabile aleatoria binomiale di parametri $n = 100, p = 0.75$, si determini il valore di $P\{X = 70\}$ e $P\{X \leq 70\}$.

Soluzione La risposta riportata a pagina seguente può essere ottenuta utilizzando il software della pagina web.

4.7 LA VARIABILE ALEATORIA DI POISSON

Una variabile aleatoria X , che assuma i valori $0, 1, 2, \dots$, è detta una variabile aleatoria di Poisson con parametro λ se per un qualche valore $\lambda > 0$,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

La Formula (7.1) definisce la densità discreta, essendo

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

La funzione di distribuzione di Poisson venne introdotta da S.D. Poisson in un testo che lui scrisse sulle applicazioni del calcolo delle probabilità alle cause civili e ai processi criminali. Questo libro, pubblicato nel 1837, era intitolato *Ricerche sulla probabilità dei giudizi in materia criminale e civile*.

La variabile aleatoria di Poisson ha una vasta gamma di possibili applicazioni ad aree diverse, visto che può essere utilizzata come approssimazione di una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) , quando n è grande e p è piccolo a sufficienza perché il prodotto np tenda a un valore positivo finito. Per vedere ciò, supponiamo che X sia una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) e sia $\lambda = np$. Allora

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &= \frac{n!}{(n-i)! i!} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \frac{n!}{(n-i)! i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{(1 - \lambda/n)^n}{(1 - \lambda/n)^i} \end{aligned}$$

Ora, quando n assume valori grandi e p valori piccoli, in modo tale che λ assume un valore costante,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \quad \frac{n(n-1) \cdots (n-i+1)}{n^i} \approx 1 \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

Quindi, per n grande e p piccolo, in modo che λ rimanga costante,

$$P\{X = i\} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$$

In altri termini, se eseguiamo una successione di n prove indipendenti, ognuna delle quali può risultare un successo con probabilità pari a p , allora, quando n è grande e p è sufficientemente piccolo da rendere np un valore positivo finito, il numero di successi che otteniamo vengono bene approssimati da una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = np$. Questo valore λ (che in seguito vedremo essere uguale al numero atteso di successi) viene di solito determinato in maniera empirica.

Alcuni esempi di variabili aleatorie che usualmente seguono la distribuzione di una legge di probabilità di Poisson (cioè hanno la densità discreta della Formula (7.1)) sono riportati qui di seguito:

1. Il numero di errori di stampa in una pagina (o un gruppo di pagine) di un libro;
2. Il numero di persone ultracentenarie di una comunità;
3. Il numero di numeri di telefono sbagliati chiamati in un giorno;
4. Il numero di pacchi di biscotti per cani venduti in un supermercato in un particolare giorno;
5. Il numero di clienti che entrano in un ufficio postale in un determinato giorno;
6. Il numero di posti di professore banditi ogni anno in Italia per un particolare settore scientifico disciplinare;
7. Il numero di particelle α emesse da un materiale radioattivo in un periodo di tempo fissato.

Ognuna delle precedenti variabili aleatorie, e molte altre ancora, sono approssimativamente di Poisson per la stessa ragione, grazie cioè alla proprietà che una legge di Poisson approssima una legge binomiale. Per esempio, possiamo supporre che ci sia una piccola probabilità p che una singola lettera di un testo venga sbagliata. Quindi il numero di errori di stampa in una pagina può essere approssimato con una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = np$, dove n è il numero di lettere che formano la singola pagina. In maniera analoga, possiamo supporre che sia piccola la probabilità che una singola persona di una data comunità viva più di 100 anni. Oppure, a ogni persona che entra in un negozio può essere assegnata un probabilità abbastanza piccola che acquisti un pacco di biscotti per cani, e così via.

Esempio 7a. Supponiamo che il numero di errori tipografici di una singola pagina di questo libro abbia una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Si calcoli la probabilità che ci sia almeno un errore in questa pagina.

Soluzione Denotiamo con X il numero (aleatorio) di errori di questa pagina; abbiamo quindi

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393 \quad \blacksquare$$

Esempio 7b. Supponiamo che un pezzo prodotto da un macchinario sia difettoso con probabilità pari a 0.1. Si determini la probabilità che un insieme di 10 pezzi ne contenga al più uno difettoso.

Soluzione La probabilità desiderata è $\binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.1)^1(0.9)^9 = 0.7361$, mentre l'approssimazione di Poisson dà il valore $e^{-1} + e^{-1} \approx 0.7358$. \blacksquare

Esempio 7c. Consideriamo un esperimento che consista nel contare il numero di particelle α emesse da un grammo di materiale radioattivo in un secondo. Se sappiamo, grazie all'esperienza, che in media vengono emesse 3.2 particelle α , come possiamo approssimare in maniera soddisfacente la probabilità che non siano emesse più di 2 particelle α ?

Soluzione Se pensiamo che il grammo di materiale radioattivo in realtà è formato da una grande numero n di atomi, ognuno dei quali ha probabilità $3.2/n$ di disintegrarsi e quindi emettere una particella α nel secondo di osservazione, allora vediamo che, con una buona approssimazione, il numero di particelle α emesse sarà rappresentabile con una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 3.2$. Quindi la probabilità cercata vale

$$P\{X \leq 2\} = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2}e^{-3.2} \\ \approx 0.3799 \quad \blacksquare$$

Prima di calcolare il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ , ricordiamo che questa variabile aleatoria approssima una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p , quando n è grande, p è piccolo e $\lambda = np$. Siccome una tale variabile aleatoria binomiale ha valore atteso pari a $np = \lambda$ e varianza pari a $np(1-p) = \lambda(1-p) \approx \lambda$ (essendo per ipotesi p piccolo), sembra ragionevole attendersi che sia il valore atteso che la varianza di una variabile aleatoria di Poisson debbano essere uguali al parametro λ . Verifichiamo ora l'esattezza di questa congettura.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \quad \text{ponendo } j = i - 1 \\ = \lambda \quad \text{essendo } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$$

Perciò il valore atteso di una variabile aleatoria di Poisson X è effettivamente uguale al suo parametro λ . Per determinare la varianza, iniziamo calcolando $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\ = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{ie^{-\lambda}\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} P\{i, j, k \text{ hanno il medesimo compleanno}\} &= \binom{n}{3} \left(\frac{1}{365}\right)^2 \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6 \times (365)^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$P\{\text{nessuna terna ha il medesimo compleanno}\} \approx \exp\left\{\frac{-n(n-1)(n-2)}{799350}\right\}$$

Questa probabilità sarà minore di $\frac{1}{2}$ quando n è tale che

$$n(n-1)(n-2) \geq 799350 \log 2 \approx 554067$$

che è equivalente ad affermare che $n \geq 84$. Perciò, la probabilità approssimata che almeno 3 persone, in un gruppo di 84 o più, compiano gli anni il medesimo giorno è maggiore di $\frac{1}{2}$.

Affinché il numero di eventi che si verificano si distribuisca approssimativamente con legge di Poisson, non è essenziale che essi abbiano tutti la medesima probabilità di verificarsi, ma solo che queste probabilità siano piccole. Quello che segue è il così detto *Paradigma di Poisson*.

Paradigma di Poisson. Consideriamo n eventi, con p_i uguale alla probabilità che l'evento i si verifichi, $i = 1, \dots, n$. Se tutti i valori p_i sono "piccoli" e le prove sono indipendenti o al più "debolmente dipendenti", allora il numero di eventi che si verificano si distribuisce approssimativamente con legge di Poisson di media $\sum_{i=1}^n p_i$.

Il prossimo esempio non solo fa uso del Paradigma di Poisson, ma ha anche il pregio di illustrare alcune delle tecniche che abbiamo studiato fino a ora.

Esempio 7d. Lunghezza della più lunga sequenza di successi Una moneta viene lanciata per n volte. Supponendo che i lanci siano tra loro indipendenti e che ognuno dia testa con probabilità pari a p , qual è la probabilità che si verifichi una sequenza di k teste consecutive?

Soluzione Iniziamo usando il Paradigma di Poisson per approssimare questa probabilità. Se, per $i = 1, \dots, n - k + 1$, denotiamo con H_i l'evento che i lanci $i, i + 1, \dots, i + k - 1$ abbiano dato tutti testa, allora la probabilità cercata è che almeno uno tra gli eventi H_i si sia verificato. Siccome H_i rappresenta l'evento che, iniziando dal lancio i -esimo si sia avuto testa nei successivi k lanci, segue che $P(H_i) = p^k$. Perciò, quando p^k è piccola, potremmo pensare che il numero di eventi H_i che si verificano segua approssimativamente una legge di Poisson. Tuttavia questo non è vero, perché, sebbene le probabilità siano piccole, alcune delle loro dipendenze sono troppo grandi per poter applicare la approssimazione di Poisson. Per esempio, poiché la probabilità condizionata che i lanci $2, \dots, k + 1$ diano tutti testa, sapendo che i lanci $1, \dots, k$ hanno dato testa, è uguale alla probabilità che il lancio $k + 1$ dia testa, abbiamo che

$$P(H_2|H_1) = p$$

che risulta notevolmente più grande della probabilità non condizionata H_2 .

Il trucco che permette di usare l'approssimazione di Poisson consiste nel notare che ci sarà una sequenza di k teste consecutive se ci sarà una successione di k teste seguite da una croce oppure se gli ultimi k lanci danno tutti testa. Conseguentemente, per $i = 1, \dots, n - k$, sia E_i l'evento che i lanci $i, \dots, i + k - 1$ diano tutti testa e che il lancio $i + k$ dia croce e definiamo inoltre con E_{n-k+1} l'evento che i lanci $n - k + 1, \dots, n$ diano tutti testa. Notiamo che

$$\begin{aligned} P(E_i) &= p^k(1-p), & i \leq n-k \\ P(E_{n-k+1}) &= p^k \end{aligned}$$

Perciò, quando p^k è piccolo, ognuno degli eventi E_i ha probabilità di realizzarsi piccola. Inoltre, quando $i \neq j$, se gli eventi E_i e E_j si riferiscono a sequenze di lanci che non si sovrappongono, allora $P(E_i|E_j) = P(E_i)$, mentre se le sequenze si sovrappongono abbiamo che $P(E_i|E_j) = 0$. Perciò in entrambi i casi le probabilità condizionate sono vicine a quelle non condizionate; da ciò ricaviamo che N , il numero di eventi E_i che si realizzano, dovrebbe avere approssimativamente una legge di Poisson di media

$$E[N] = \sum_{i=1}^{n-k+1} P(E_i) = (n-k)p^k(1-p) + p^k$$

Siccome non c'è una successione di k teste se (e solo se) $N = 0$, questo dà

$$\begin{aligned} P(\text{non ci sono successioni di lunghezza } k) &= P(N = 0) \\ &\approx \exp\{-(n-k)p^k(1-p) - p^k\} \end{aligned}$$

Se denotiamo con L_n il maggior numero di lanci consecutivi che danno testa in n lanci, allora poiché L_n sarà minore di k se (e solo se) non ci sono successioni di teste di lunghezza k , dalla precedente equazione otteniamo

$$P\{L_n < k\} \approx \exp\{-(n-k)p^k(1-p) - p^k\}$$

Ora, supponiamo che la moneta sia bilanciata, cioè supponiamo che $p = 1/2$. Allora otteniamo

$$P\{L_n < k\} \approx \exp\left\{-\frac{n-k+2}{2^{k+1}}\right\} \approx \exp\left\{-\frac{n}{2^{k+1}}\right\}$$

dove l'ultima approssimazione suppone che $e^{(k-2)/(2^{k+1})} \approx 1$ (cioè che $\frac{k-2}{2^{k+1}} \approx 0$).

Sia $j = \log_2 n$ e assumiamo che j sia un valore intero. Per $k = j + i$

$$\frac{n}{2^{k+1}} = \frac{n}{2^j 2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

Di conseguenza

$$P\{L_n < j + i\} \approx \exp\{-(1/2)^{i+1}\}$$

che implica

$$P\{L_n = j+i\} = P\{L_n < j+i+1\} - P\{L_n < j+i\} \\ \approx \exp\{-(1/2)^{i+2}\} - \exp\{-(1/2)^{i+1}\}$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned} P\{L_n < j-3\} &\approx e^{-4} \approx 0.0183 \\ P\{L_n = j-3\} &\approx e^{-2} - e^{-4} \approx 0.1170 \\ P\{L_n = j-2\} &\approx e^{-1} - e^{-2} \approx 0.2325 \\ P\{L_n = j-1\} &\approx e^{-1/2} - e^{-1} \approx 0.2387 \\ P\{L_n = j\} &\approx e^{-1/4} - e^{-1/2} \approx 0.1723 \\ P\{L_n = j+1\} &\approx e^{-1/8} - e^{-1/4} \approx 0.1037 \\ P\{L_n = j+2\} &\approx e^{-1/16} - e^{-1/8} \approx 0.0569 \\ P\{L_n = j+3\} &\approx e^{-1/32} - e^{-1/16} \approx 0.0298 \\ P\{L_n \geq j+4\} &\approx 1 - e^{-1/32} \approx 0.0308 \end{aligned}$$

Quindi osserviamo il seguente interessante fatto: indipendentemente da quanto sia grande n , la lunghezza della più lunga successione di teste che si ottiene in n lanci dista meno di 2 da $\log_2(n) - 1$ con probabilità pari a 0.86.

Deriviamo ora l'espressione esatta della probabilità che esista una successione di k teste consecutive in n lanci di una moneta che dà testa a ogni prova con probabilità pari a p . Presi gli eventi $E_i, i = 1, \dots, n - k + 1$, definiti in precedenza, e presa L_n , come prima, la variabile lunghezza della più lunga sequenza di teste

$$P(L_n \geq k) = P(\text{c'è una successione di } k \text{ teste consecutive}) = \\ = P(\cup_{i=1}^{n-k+1} E_i)$$

Il principio di inclusione/esclusione per la probabilità di una unione di eventi può essere scritto come

$$P(\cup_{i=1}^{n-k+1} E_i) = \sum_{r=1}^{n-k+1} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} P(E_{i_1} \dots E_{i_r})$$

Denotiamo con S_i l'insieme dei lanci al quale l'evento E_i si riferisce. (Così, per esempio, $S_1 = \{1, \dots, k + 1\}$). Ora consideriamo la probabilità di una delle possibili intersezioni di r eventi che non includono E_{n-k+1} . Cioè, consideriamo $P(E_{i_1} \dots E_{i_r})$, dove $i_1 < \dots < i_r < n - k + 1$. Se c'è una qualche sovrapposizione tra gli insiemi S_{i_1}, \dots, S_{i_r} , allora la probabilità vale 0. Altrimenti, se non c'è sovrapposizione, gli eventi E_{i_1}, \dots, E_{i_r} risultano tra loro indipendenti. Perciò

$$P(E_{i_1} \dots E_{i_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se c'è almeno una sovrapposizione tra } S_{i_1}, \dots, S_{i_r} \\ p^{rk}(1-p)^r, & \text{se non ci sono sovrapposizioni} \end{cases}$$

Dobbiamo ora determinare il numero di differenti scelte di $i_1 < \dots < i_r < n - k + 1$ per le quali non ci sono sovrapposizioni tra gli insiemi S_{i_1}, \dots, S_{i_r} . Per farlo, notiamo prima di tutto che ognuno degli insiemi $S_{i_j}, j = 1, \dots, r$, si riferisce a $k + 1$ lanci e quindi se non ci sono sovrapposizioni tutti assieme si riferiscono a $r(k + 1)$ lanci. Ora consideriamo ogni permutazione di r copie della lettera a (una per

ognuno degli insiemi $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}$ e di $n - r(k + 1)$ copie della lettera b (una per ognuna delle prove non appartenenti a qualcuno tra $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}, S_{n-k+1}$). Interpretiamo il numero di lettere b prima della prima a come il numero di lanci prima di S_{i_1} , il numero di lettere b tra la prima e la seconda lettera a come il numero di lanci tra S_{i_1} e S_{i_2} , e così via fino al numero di lettere b dopo l'ultima a che rappresenta il numero di lanci dopo S_{i_r} . Poiché ci sono $\binom{n - rk}{r}$ permutazioni di r lettere a e $n - r(k + 1)$ lettere b , dove ognuna di tali permutazioni corrisponde (in modo univoco) a un'opportuna scelta di insiemi non sovrapposti, vediamo che

$$\sum_{i_1 < \dots < i_r < n-k+1} P(E_{i_1} \dots E_{i_r}) = \binom{n - rk}{r} p^{rk}(1-p)^r$$

Dobbiamo ora considerare le probabilità di r possibili intersezioni del tipo

$$P(E_{i_1} \dots E_{i_{r-1}} E_{n-k+1})$$

dove $i_1 < \dots < i_{r-1} < n - k + 1$. Questa probabilità sarà uguale a 0 se ci sarà almeno una sovrapposizione tra $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}, S_{n-k+1}$; in caso contrario, gli eventi della intersezione risulteranno indipendenti e così

$$P(E_{i_1} \dots E_{i_{r-1}} E_{n-k+1}) = [p^k(1-p)]^{r-1} p^k = p^{rk}(1-p)^{r-1}$$

Ora, utilizzando un argomento simile al precedente, il numero di insiemi senza sovrapposizioni $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}, S_{n-k}$ sarà uguale al numero di permutazioni di $r - 1$ lettere a (una per ognuno dei $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}$) e $n - (r - 1)(k + 1) - k = n - rk - (r - 1)$ lettere b (una per ognuna delle prove che non appartengono a $S_{i_1}, \dots, S_{i_{r-1}}, S_{n-k+1}$).

Siccome ci sono $\binom{n - rk}{r - 1}$ permutazioni di $r - 1$ lettere a e $n - rk - (r - 1)$ lettere b , vediamo che

$$\sum_{i_1 < \dots < i_{r-1} < n-k+1} P(E_{i_1} \dots E_{i_{r-1}} E_{n-k+1}) = \binom{n - rk}{r - 1} p^{rk}(1-p)^{r-1}$$

Unendo queste due espressioni otteniamo il risultato che:

$$P(L_n \geq k) = \sum_{r=1}^{n-k+1} (-1)^{r+1} \left[\binom{n - rk}{r} + \frac{1}{p} \binom{n - rk}{r - 1} \right] p^{kr}(1-p)^r$$

dove utilizziamo la convenzione che $\binom{m}{j} = 0$ se $m < j$.

Da un punto di vista computazionale, un modo più efficiente per calcolare le precedenti probabilità è attraverso una serie di equazioni ricorsive. Per farlo, sia A_n l'evento che esista una successione di k teste consecutive in una serie di n lanci di una moneta equilibrata e sia $P_n = P(A_n)$. Deriviamo una successione di equazioni ricorsive per P_n condizionando rispetto a quando viene per la prima volta croce. Per $j = 1, \dots, k$ sia F_j l'evento che la prima croce viene al j -esimo lancio e sia H l'evento che i primi k lanci diano tutti testa. Poiché gli eventi $F_1, \dots,$

F_k, H sono a 2 a 2 disgiunti e la loro unione dà l'intero spazio campionario (ovvero uno e uno solo di essi deve verificarsi) abbiamo che

$$P(A_n) = \sum_{j=1}^k P(A_n|F_j)P(F_j) + P(A_n|H)P(H)$$

Ora, dato che la prima testa appare al lancio j -esimo, dove $j < k$, segue che i primi j lanci vengono scartati tra quelli nei quali sia possibile ottenere una successione di k teste e quindi la probabilità condizionata di questo evento è uguale alla probabilità che una tale successione avvenga nei rimanenti $n - j$ lanci. Perciò

$$P(A_n | F_j) = P_{n-j}$$

Poiché $P(A_n | H) = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} P_n &= P(A_n) \\ &= \sum_{j=1}^k P_{n-j} P(F_j) + P(H) \\ &= \sum_{j=1}^k P_{n-j} p^{j-1} (1-p) + p^k \end{aligned}$$

Partendo da $P_j = 0, j < k$ e $P_k = p^k$, possiamo usare la precedente espressione ricorsivamente e calcolare P_{k+1}, P_{k+2} e così via fino a P_n . Per esempio, supponiamo di voler calcolare la probabilità che ci sia una sequenza di 2 teste consecutive in 4 lanci di una moneta equilibrata. Allora, posto $k = 2$ abbiamo che $P_1 = 0, P_2 = (1/2)^2$. Poiché, quando $p = 1/2$, la ricorsione diviene

$$P_n = \sum_{j=1}^k P_{n-j} (1/2)^j + (1/2)^k$$

otteniamo

$$P_3 = P_2(1/2) + P_1(1/2)^2 + (1/2)^2 = 3/8$$

e

$$P_4 = P_3(1/2) + P_2(1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$$

che è chiaramente vera perché ci sono 8 esiti possibili che danno una successione di due teste consecutive $hhhh, hhht, hhth, hthh, thhh, hhtt, thht$ e $tthh$ ognuno di questi si ottiene con probabilità pari a $1/16$. ■

Un altro utilizzo della distribuzione di probabilità di Poisson si ha nelle situazioni in cui gli "eventi" si verificano in certi istanti di tempo. Un esempio è quello nel quale un evento sia il verificarsi di un terremoto; un'altra possibilità è rappresentato dall'evento che corrisponde all'arrivo di una persona a uno sportello postale. Una terza possibilità è rappresentata dall'evento che si verifica quando scoppia una guerra. Supponiamo che gli eventi avvengano effettivamente a certi istanti (aleatori) di tempo e supponiamo che data una costante positiva λ , le seguenti ipotesi siano verificate:

1. La probabilità che esattamente 1 evento si verifichi in un dato intervallo di tempo di lunghezza h sia uguale a $\lambda h + o(h)$, dove $o(h)$ indica una qualsiasi funzione

$f(h)$ per la quale $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = 0$. [Per esempio, $f(h) = h^2$ è $o(h)$, mentre $f(h) = h$ non lo è.]

2. La probabilità che 2 o più eventi si verifichino in un intervallo di tempo di ampiezza h è uguale a $o(h)$.
3. Siano n, j_1, j_2, \dots, j_n degli interi. Se, per ogni famiglia di n intervalli disgiunti, definiamo E_i l'evento che esattamente j_i degli eventi considerati si verifichino nell' i -esimo di questi intervalli, allora gli eventi E_1, E_2, \dots, E_n sono indipendenti.

Per semplificare, le ipotesi 1 e 2 stabiliscono che per valori di h piccoli, la probabilità che esattamente 1 evento si verifichi durante un intervallo di ampiezza pari a h è uguale a λh più qualcosa che è piccolo rispetto a h , mentre la probabilità che 2 o più eventi si verifichino è piccolo rispetto a h . L'ipotesi 3 stabilisce che ciò che accade in un intervallo di tempo non influenza (probabilisticamente) ciò che accade in un altro intervallo di tempo disgiunto dal primo.

Se le ipotesi 1, 2 e 3 sono verificate, proveremo ora che il numero di eventi che si verificano in ogni intervallo di lunghezza pari a t si distribuisce come una variabile di Poisson di parametro λt . Per essere precisi, definiamo l'intervallo $[0, t]$ e denotiamo con $N(t)$ il numero di eventi che si verificano in questo intervallo. Per ricavare il valore di $P\{N(t) = k\}$, iniziamo col suddividere l'intervallo $[0, t]$ in n sottointervalli disgiunti di lunghezza pari a t/n (si veda la Figura 4.7).

Ora,

$$\begin{aligned} P\{N(t) = k\} &= P\{k \text{ degli } n \text{ sottointervalli contengono esattamente 1 evento} \\ &\quad \text{e gli altri } n - k \text{ ne contengono 0}\} \\ &+ P\{N(t) = k \text{ e almeno 1 sottointervallo contiene} \\ &\quad \text{2 o più eventi}\} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Questo si verifica perché l'evento che compare nel termine di sinistra della precedente Formula (7.2), cioè $\{N(t) = k\}$, è chiaramente uguale all'unione dei due eventi disgiunti che compaiono a destra della formula. Definendo A e B questi due eventi, abbiamo che

$$\begin{aligned} P(B) &\leq P\{\text{almeno un sottointervallo contiene 2 o più eventi}\} \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n \{i\text{-esimo sottointervallo contiene 2 o più eventi}\}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P\{i\text{-esimo sottointervallo contiene 2 o più eventi}\} \text{ per la diseuguaglianza di Boole} \\ &= \sum_{i=1}^n o\left(\frac{t}{n}\right) \text{ per l'ipotesi 2} \end{aligned}$$



Figura 4.7

$$= no\left(\frac{t}{n}\right) \\ = t\left[\frac{o(t/n)}{t/n}\right]$$

Ora, per ogni $t, t/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e così $o(t/n)/(t/n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ per la definizione di $o(h)$. Perciò

$$P(B) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (7.3)$$

Considerando ora l'evento A, siccome le ipotesi 1 e 2 implicano che⁴

$$P\{0 \text{ eventi si verificano in un intervallo di lunghezza } h\} \\ = 1 - [\lambda h + o(h) + o(h)] = 1 - \lambda h - o(h)$$

per l'ipotesi di indipendenza 3 abbiamo che

$$P(A) = P\{k \text{ dei sottointervalli contengono esattamente 1 evento} \\ \text{e gli altri } n - k \text{ ne contengono 0}\} \\ = \binom{n}{k} \left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^k \left[1 - \left(\frac{\lambda t}{n}\right) - o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^{n-k}$$

Poiché

$$n\left[\frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right] = \lambda t + t\left[\frac{o(t/n)}{t/n}\right] \rightarrow \lambda t \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza per provare che la legge di Poisson approssima una legge binomiale, ci dà

$$P(A) \rightarrow e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (7.4)$$

Perciò, da (7.2), (7.3) e (7.4) ricaviamo, per $n \rightarrow \infty$, che

$$P\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.5)$$

Quindi, sotto le ipotesi 1, 2 e 3, il numero di eventi che si verificano in un intervallo fisso di lunghezza t si distribuisce come una variabile aleatoria di Poisson di media λt , e diremo che gli eventi si verificano secondo un processo di Poisson di intensità pari a λ . Il valore λ , che si può dimostrare essere uguale al numero medio di eventi che si verificano per unità di tempo, è una costante che in generale deve essere determinata empiricamente.

La precedente discussione spiega perché le variabili aleatorie di Poisson sono in generale un buona approssimazione per descrivere dei fenomeni in apparenza tanto diversi come i seguenti:

⁴La somma di due funzioni che siano entrambe un $o(h)$ è ancora un $o(h)$. Questo si verifica perché $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)/h = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)/h = 0$ e quindi $\lim_{h \rightarrow 0} [f(h) + g(h)]/h = 0$.

1. Il numero di terremoti che si verificano durante un prefissato intervallo di tempo;
2. Il numero di guerre scoppiate in un anno;
3. Il numero di elettroni emessi da un catodo riscaldato in un prefissato intervallo di tempo;
4. Il numero di decessi di titolari di una polizza di assicurazione sulla vita occorsi in un prefissato intervallo di tempo.

Esempio 7e. Supponiamo che i terremoti nella parte occidentale degli Stati Uniti si verifichino, in accordo con le ipotesi 1, 2 e 3, con una intensità pari a $\lambda = 2$, considerando l'unità di tempo di una settimana. (Cioè, i terremoti avvengono a un ritmo medio di 2 per settimana).

- (a) Si trovi la probabilità che avvengano almeno 3 terremoti nelle prossime 2 settimane.
- (b) Si trovi la distribuzione di probabilità dell'istante, partendo da adesso, nel quale si verificherà il prossimo terremoto.

Soluzione (a) Grazie alla Formula (7.5) abbiamo che

$$P\{N(2) \geq 3\} = 1 - P\{N(2) = 0\} - P\{N(2) = 1\} - P\{N(2) = 2\} \\ = 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{4^2}{2}e^{-4} \\ = 1 - 13e^{-4}$$

(b) Denotiamo con X il tempo (in settimane) che trascorrerà fino al prossimo terremoto. Poiché X è maggiore o uguale a t se e solo se nessun evento si verificherà prima delle prossime t unità di tempo, dalla Formula (7.5) otteniamo che

$$P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

così la funzione di distribuzione F della variabile X è data da

$$F(t) = P\{X \leq t\} = 1 - P\{X > t\} = 1 - e^{-\lambda t} \\ = 1 - e^{-2t}$$

4.7.1 Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile di Poisson

Se X è una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ , allora

$$\frac{P\{X = i + 1\}}{P\{X = i\}} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i+1} / (i + 1)!}{e^{-\lambda} \lambda^i / i!} = \frac{\lambda}{i + 1} \quad (7.6)$$

Iniziando da $P\{X = 0\} = e^{-\lambda}$, possiamo utilizzare la Formula (7.6) per calcolare ricorsivamente

$$P\{X = 1\} = \lambda P\{X = 0\} \\ P\{X = 2\} = \frac{\lambda}{2} P\{X = 1\} \\ \vdots \\ P\{X = i + 1\} = \frac{\lambda}{i + 1} P\{X = i\}$$

Sul sito web si può trovare il programma che utilizza la Formula (7.6) per calcolare la densità discreta di una variabile di Poisson.

Esempio 7f (a) Si calcoli $P\{X \leq 90\}$ quando X è una variabile aleatoria di Poisson di media 100.

(b) Si calcoli $P\{Y \leq 1075\}$ quando Y è una variabile aleatoria di Poisson di media 1000.

Soluzione Grazie al programma presente sul sito web si ottiene

$$(a) P\{X \leq 100\} \approx 0.1714;$$

$$(b) P\{Y \leq 1075\} \approx 0.9894. \quad \blacksquare$$

4.8 ULTERIORI DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ DISCRETE

4.8.1 La variabile aleatoria geometrica

Supponiamo di ripetere in maniera indipendente una prova, che abbia probabilità pari a p , $0 < p < 1$ di risultare in un successo, fintanto che non si verifica il primo successo. Se denotiamo con X il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, allora

$$P\{X = n\} = (1 - p)^{n-1}p \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

La Formula (8.1) si ricava notando che condizione necessaria e sufficiente affinché X sia uguale a n è che le prime $n - 1$ prove siano state un insuccesso e l' n -esima prova un successo e utilizzando l'ipotesi di indipendenza tra le varie prove.

Poiché

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} = \frac{p}{1 - (1 - p)} = 1$$

segue che con probabilità pari a 1, un successo prima o poi si verificherà. Ogni variabile aleatoria X la cui densità discreta è data dalla Formula (8.1) è detta variabile aleatoria geometrica di parametro p .

Esempio 8a. Un'urna contiene N palline bianche e M palline nere. Si estrae una pallina alla volta, in maniera aleatoria, fino a che si pesca la prima pallina nera. Se supponiamo che ogni volta che estraiamo una pallina la reinseriamo nell'urna prima della successiva estrazione, qual è la probabilità che

(a) si debbano estrarre esattamente n palline;

(b) si debbano estrarre almeno k palline?

Soluzione Se denotiamo con X il numero di palline che dobbiamo estrarre per ottenere la prima pallina nera, allora X avrà una densità discreta data da (8.1) con $p = M/(M + N)$. Quindi

$$(a) P\{X = n\} = \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \frac{M}{M + N} = \frac{MN^{n-1}}{(M + N)^n}$$

$$\begin{aligned} (b) P\{X \geq k\} &= \frac{M}{M + N} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{M}{M + N}\right) \left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \left[1 - \frac{N}{M + N}\right] \\ &= \left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Chiaramente la probabilità in (b) si sarebbe potuta calcolare direttamente, poiché la probabilità che siano necessari almeno k estrazioni per ottenere il primo successo è uguale alla probabilità che le prime $k - 1$ prove siano risultate tutte degli insuccessi. Quindi, per una variabile aleatoria geometrica, vale che

$$P\{X \geq k\} = (1 - p)^{k-1} \quad \blacksquare$$

Esempio 8b. Si determini il valore atteso di una variabile aleatoria geometrica.

Soluzione Posto $q = 1 - p$ abbiamo che

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p \\ &= p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^n) \\ &= p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \\ &= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1 - q} \right) \\ &= \frac{p}{(1 - q)^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

In altri termini, se ripetiamo una serie di prove indipendenti, ognuna con probabilità p di essere un successo, fino a che si verifica il primo successo, allora il numero atteso di prove è uguale a $1/p$. Per esempio, il numero atteso di lanci di un dado equilibrato che dobbiamo fare per ottenere un 1 è pari a sei. \blacksquare

Esempio 8c. Si determini la varianza di una variabile aleatoria geometrica.

Soluzione Per determinare $\text{Var}(X)$ calcoliamo dapprima $E[X^2]$. Posto $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} p \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(nq^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n \right) \\
&= p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} E[X] \right) \\
&= p \frac{d}{dq} [q(1-q)^{-2}] \\
&= p \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3} \right] \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Quindi, essendo $E[X] = 1/p$,

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad \blacksquare$$

4.8.2 La variabile aleatoria binomiale negativa

Supponiamo di ripetere in maniera indipendente una prova, che abbia probabilità pari a p , $0 < p < 1$ di risultare in un successo, fintanto che non si totalizzano r successi. Se denotiamo con X il numero di prove necessarie per ottenerli, allora

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad n = r, r+1, \dots \quad (8.2)$$

La Formula (8.2) si ricava perché per ottenere l' r -esimo successo alla n -esima prova, ci dovranno essere $r-1$ successi nelle prime $n-1$ prove e l' n -esima prova deve essere un successo. La probabilità del primo evento vale

$$\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}$$

e la probabilità del secondo vale p ; grazie all'indipendenza delle varie prove tra loro, la Formula (8.2) è verificata. Per provare che la precedente formula dà effettivamente una densità discreta, possiamo verificare anche per via analitica che

$$\sum_{n=r}^{\infty} P\{X = n\} = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = 1 \quad (8.3)$$

o utilizzare il seguente argomento puramente probabilistico: il numero di prove necessarie per ottenere r successi può essere espresso come $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$, dove Y_1 rappresenta il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo, Y_2 il numero di prove ulteriori necessarie per ottenere il secondo successo, Y_3 le ulteriori prove necessarie per ottenere il terzo successo e così via. Essendo le prove indipendenti e avendo tutte pari probabilità p di risultare in un successo, segue che le Y_1, Y_2, \dots, Y_r sono variabili aleatorie geometriche di parametro p . Quindi ognuna è finita con probabilità 1, così anche $\sum_{i=1}^r Y_i$ deve essere finita con probabilità 1, il che è equivalente ad aver provato la Formula (8.3).

Ogni variabile aleatoria X la cui densità discreta è data dalla Formula (8.2) è detta una variabile aleatoria binomiale negativa di parametri (r, p) . Si noti che una variabile geometrica è una variabile binomiale negativa di parametro $(1, p)$.

Nell'esempio successivo utilizziamo la distribuzione binomiale negativa per ottenere un'altra soluzione al problema dei punti.

Esempio 8d. Se ripetiamo, in maniera indipendente, una prova, che abbia probabilità pari a p di risultare in un successo, qual è la probabilità che r successi si presentino prima di m insuccessi?

Soluzione Possiamo ottenere la soluzione notando che r successi si verificano prima di ottenere m insuccessi se e solo se l' r -esimo successo non avviene dopo la $r+m-1$ prova. Questo è vero perché se il successo r -esimo si verifica prima o esattamente alla $r+m-1$ prova, allora esso si sarà verificato prima dell' m -esimo insuccesso, e viceversa. Quindi, grazie alla Formula (8.2), la probabilità cercata vale

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad \blacksquare$$

Esempio 8e. Il problema di Banach dei fiammiferi. Un matematico che fuma la pipa porta sempre con sé 2 scatole di fiammiferi, una nella sua tasca destra e una in quella sinistra. Ogni volta che ha bisogno di un fiammifero, lo sceglie da una delle due scatole con uguale probabilità. Consideriamo il momento nel quale il matematico scopre che una delle due scatole è vuota. Se all'inizio entrambe le scatole contengono N fiammiferi, qual è la probabilità che ci siano esattamente k fiammiferi nell'altra scatola, con $k = 0, 1, \dots, N$?

Soluzione Denotiamo con E l'evento che il matematico scopra che la prima scatola vuota è quella contenuta nella tasca destra e che in quel momento siano presenti k fiammiferi in quella della tasca sinistra. Ora, questo evento si verifica se e solo se la $(N+1)$ -esima scelta del fiammifero dalla scatola della tasca destra è avvenuta alla $N+1+N-k$ -esima prova. Quindi, dalla Formula (8.2) (con $p = \frac{1}{2}$, $r = N+1$, $n = 2N-k+1$), abbiamo che

$$P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

Siccome la probabilità che scopra che la prima scatola vuota è quella contenuta nella tasca sinistra e che in quel momento siano presenti k fiammiferi in quella della tasca destra è uguale alla precedente, il risultato cercato vale

$$2P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k} \quad \blacksquare$$

Esempio 8f. Si calcoli il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria binomiale negativa di parametri r e p .

Per massimizzare $P_i(N)$, notiamo per iniziare che

$$\frac{P_i(N)}{P_i(N-1)} = \frac{(N-m)(N-n)}{N(N-m-n+i)}$$

Ora, la precedente frazione è maggiore di 1 se e solo se

$$(N-m)(N-n) \geq N(N-m-n+i)$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$N \leq \frac{mn}{i}$$

Perciò $P_i(N)$ dapprima è crescente e poi decrescente e raggiunge il valore massimo in corrispondenza del massimo valore che non supera mn/i . Questo valore sarà perciò la stima di massima verosimiglianza di N . Per esempio, supponiamo che la prima volta si fossero catturati $m = 50$ animali, che sono stati marchiati e liberati. Se in una seconda cattura di $n = 40$ animali, di questi 4 sono marchiati, allora possiamo stimare che la popolazione totale di animali sia di 500 esemplari. (Si potrebbe notare che una stima alternativa si sarebbe potuta ottenere supponendo che la percentuale di animali marchiati nella regione, m/N , è approssimativamente uguale alla percentuale degli animali marchiati presenti nella seconda cattura, i/n).

Esempio 8i. Un rivenditore acquista le componenti elettriche a lotti di 10. La sua politica è di controllare a caso 3 componenti di ogni lotto e di accettarlo solo se nessuno dei tre pezzi controllati risulta difettoso. Se il 30 per cento dei lotti ha quattro pezzi difettosi e il 70 per cento un solo pezzo difettoso, che percentuale di lotti il rivenditore rifiuterà?

Soluzione Denotiamo con A l'evento che il rivenditore accetti un lotto. Ora,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|\text{il lotto ha 4 pezzi difettosi}) \frac{3}{10} + P(A|\text{il lotto ha 1 pezzo difettoso}) \frac{7}{10} \\ &= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \left(\frac{3}{10}\right) + \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \left(\frac{7}{10}\right) \\ &= \frac{54}{100} \end{aligned}$$

Perciò il 46 per cento dei lotti verrà rifiutato.

Se scegliamo a caso n palline senza reinserimento da un insieme di N palline, delle quali la frazione $p = m/N$ è la percentuale di palline bianche, allora il numero di palline bianche selezionate è dato da una legge ipergeometrica. Appare ragionevole supporre che se m e N sono grandi in rapporto a n , allora il fatto che si effettui o meno il reinserimento a ogni estrazione possa essere trascurabile. Non tenendo conto delle palline precedentemente estratte, ogni successiva estrazione darà, quando m e N sono gran-

di, una pallina bianca con probabilità approssimativamente pari a p . È quindi intuitivo supporre che, quando m e N sono grandi in rapporto a n , la densità discreta di X possa essere ben approssimata da una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p . Per verificare questa intuizione si noti che se X è una variabile aleatoria ipergeometrica allora, per $i \leq n$,

$$\begin{aligned} P\{X = i\} &= \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{m!}{(m-i)!i!} \frac{(N-m)!}{(N-m-n+i)!(n-i)!} \frac{(N-n)!n!}{N!} \\ &= \binom{n}{i} \frac{m}{N} \frac{m-1}{N-1} \dots \frac{m-i+1}{N-i+1} \frac{N-m}{N-i} \frac{N-m-1}{N-i-1} \\ &\quad \dots \frac{N-m-(n-i-1)}{N-i-(n-i-1)} \\ &\approx \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{quando } p = m/N \text{ e } m \text{ e } N \\ &\quad \text{sono grandi rispetto a } n \text{ e } i \end{aligned}$$

Esempio 8j. Si determini il valore atteso e la varianza di X variabile aleatoria ipergeometrica di parametri n , N e m .

Soluzione

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \sum_{i=0}^n i^k P\{X = i\} \\ &= \sum_{i=1}^n i^k \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

Utilizzando le identità

$$i \binom{m}{i} = m \binom{m-1}{i-1} \quad \text{e} \quad n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$$

otteniamo che

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{nm}{N} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \frac{\binom{m-1}{i-1}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nm}{N} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \frac{\binom{m-1}{j}\binom{N-m}{n-1-j}}{\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nm}{N} E[(Y+1)^{k-1}] \end{aligned}$$

dove Y è una variabile aleatoria ipergeometrica di parametri $n-1$, $N-1$, $m-1$.

Quindi, ponendo $k = 1$ vediamo che

$$E[X] = \frac{nm}{N}$$

A parole, se n palline sono scelte a caso da un'urna che ne contiene N , delle quali m sono bianche, allora il numero atteso di palline bianche estratte sarà pari a nm/N .

Ponendo $k = 2$ nella formula che dà il valore di $E[X^k]$, otteniamo che

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{nm}{N} E[Y + 1] \\ &= \frac{nm}{N} \left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 \right] \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza utilizza il precedente calcolo del valore atteso.

Siccome $E[X] = nm/N$ possiamo concludere che

$$\text{Var}(X) = \frac{nm}{N} \left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N} \right]$$

Ponendo $p = m/N$ e utilizzando l'identità

$$\frac{m-1}{N-1} = \frac{Np-1}{N-1} = p - \frac{1-p}{N-1}$$

si ha infatti che

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= np[(n-1)p - (n-1)\frac{1-p}{N-1} + 1 - np] \\ &= np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE. Abbiamo provato nell'Esempio 8j che, se n palline sono estratte a caso senza reinserimento da un'urna che contiene N palline, delle quali una frazione pari a p sono bianche, allora il numero atteso di palline bianche estratte è pari a np . In aggiunta, se N è grande rispetto a n [e quindi $(N-n)/(N-1)$ è approssimativamente uguale a 1], allora

$$\text{Var}(X) \approx np(1-p)$$

In altri termini, $E[X]$ è uguale sia che si selezionino le palline facendo il reinserimento oppure no e, se il numero totale delle palline è grande, allora $\text{Var}(X)$ è approssimativamente uguale a quella che si ottiene quando si effettua il reinserimento. Questo è esattamente quanto ci aspettavamo quando abbiamo provato che per N e m grandi, la densità discreta di una variabile aleatoria ipergeometrica si approssima bene con quella di una legge binomiale. ■

4.8.4 La distribuzione zeta (o Zipf)

Una variabile aleatoria è detta avere una distribuzione di probabilità zeta (talvolta detta di Zipf) se la sua densità discreta è data da

$$P\{X = k\} = \frac{C}{k^{\alpha+1}} \quad k = 1, 2, \dots$$

per un qualche valore $\alpha > 0$. Poiché la somma delle precedenti probabilità deve essere uguale a 1, segue che

$$C = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\alpha+1} \right]^{-1}$$

La distribuzione zeta deve il suo nome al fatto che la funzione

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^s + \dots$$

è nota in matematica come la funzione zeta di Riemann (dal matematico tedesco G.F.B. Riemann).

La distribuzione zeta venne usata dall'economista italiano Pareto per descrivere la distribuzione dei redditi delle famiglie in una data nazione. Tuttavia, fu G.K. Zipf colui il quale applicò questa distribuzione a una grande varietà di aree differenti e, facendo ciò, la rese più popolare.

4.9 VALORE ATTESO DELLA SOMMA DI VARIABILI ALEATORIE

Una proprietà molto importante del valore atteso è che il valore atteso della somma di un numero finito di variabili aleatorie è uguale alla somma dei loro valori attesi. In questo paragrafo proveremo questo risultato sotto l'ipotesi che l'insieme dei possibili valori dell'esperimento aleatorio che consideriamo, cioè lo spazio campionario S , sia finito o al più infinito numerabile. Sebbene il risultato rimanga vero anche senza questa ipotesi (e nella sezione degli esercizi teorici presenteremo una traccia della dimostrazione generale), essa non solo semplifica l'argomento, ma ci permette di ottenere una dimostrazione che aiuterà a migliorare l'intuizione di cosa in effetti sia il valore atteso.

Perciò nel seguito di questo capitolo supporremo sempre che lo spazio campionario S sia finito o al più infinito numerabile.

Esempio 9a. Supponiamo di considerare come esperimento aleatorio cinque lanci di una moneta, con gli esiti dati dalle sequenze di cinque teste o croci. Denotiamo con X il numero (aleatorio) di teste che si ottengono nei primi tre lanci e con Y il numero di teste nei due lanci finali. Sia $Z = X + Y$. Allora, per esempio, per l'esito $s = (t, c, t, c, t)$,

$$X(s) = 2$$

$$Y(s) = 1$$

$$Z(s) = X(s) + Y(s) = 3$$

dove l'esito (t, c, t, c, t) comporterà due teste nei primi tre lanci, una testa negli ultimi due lanci e un totale di tre teste nei cinque lanci complessivi. ■

Sia $p(s) = P(\{s\})$ la probabilità che l'esperimento aleatorio abbia s come esito. Poiché in questo caso (S finito o infinito numerabile) ogni evento A può essere definito come unione disgiunta al più numerabile di eventi del tipo $\{s\}$, $s \in A$ segue per gli assiomi della probabilità che

$$P(A) = \sum_{s \in A} p(s)$$

Quando $A = S$, la precedente equazione diventa

$$1 = \sum_{s \in S} p(s)$$

Ora sia X una variabile aleatoria e consideriamo il suo valore atteso $E[X]$. Poiché $X(s)$ è il valore che assume X quando si realizza l'esito s , sembra intuitivo che $E[X]$ – la media pesata di tutti i possibili valori assunti da X , con pesi dati dalle probabilità che effettivamente X assuma ognuno di quei valori – dovrebbe essere definito come la media pesata dei valori $X(s)$, $s \in S$ con $X(s)$ pesato secondo la probabilità che s sia l'esito dell'esperimento aleatorio. Proviamo ora come questo ragionamento intuitivo sia in effetti vero.

Proposizione 9.1

$$E[X] = \sum_{s \in S} X(s)p(s)$$

Dimostrazione: Supponiamo che X assuma l'insieme dei valori definiti da x_i , $i \geq 1$. Per ogni i , sia S_i l'evento che X sia uguale a x_i , ovvero $S_i = \{s: X(s) = x_i\}$. Allora

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_i x_i P\{X = x_i\} \\ &= \sum_i x_i P(S_i) \\ &= \sum_i x_i \sum_{s \in S_i} p(s) \\ &= \sum_i \sum_{s \in S_i} x_i p(s) \\ &= \sum_i \sum_{s \in S_i} X(s) p(s) \\ &= \sum_{s \in S} X(s) p(s) \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza finale si ricava ricordando che S_1, S_2, \dots sono eventi a due a due disgiunti, la cui unione dà S . ♦

Esempio 9b. Supponiamo di lanciare due volte in maniera indipendente una moneta che ad ogni lancio dà testa con probabilità pari a p e denotiamo con X il numero (aleatorio) di teste ottenuto. Poiché

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(c, c) = (1 - p)^2, \\ P(X = 1) &= P(t, c) + P(c, t) = 2p(1 - p) \\ P(X = 2) &= P(t, t) = p^2 \end{aligned}$$

segue dalla definizione del valore atteso, che

$$E[X] = 0 \cdot (1 - p)^2 + 1 \cdot 2p(1 - p) + 2 \cdot p^2 = 2p$$

che coincide con

$$\begin{aligned} E[X] &= X(t, t)p^2 + X(t, c)p(1 - p) + X(c, t)(1 - p)p + X(c, c)(1 - p)^2 \\ &= 2p^2 + p(1 - p) + (1 - p)p \\ &= 2p \end{aligned}$$

Proviamo ora l'importante e utile risultato che il valore atteso della somma di un numero finito di variabili aleatorie è uguale alla somma dei loro valori attesi.

Corollario 9.2

Prese n variabili aleatorie X_1, X_2, \dots, X_n ,

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

Dimostrazione: Sia $Z = \sum_{i=1}^n X_i$. Per la Proposizione 9.1 /

$$\begin{aligned} E[Z] &= \sum_{s \in S} Z(s)p(s) \\ &= \sum_{s \in S} (X_1(s) + X_2(s) + \dots + X_n(s))p(s) \\ &= \sum_{s \in S} X_1(s)p(s) + \sum_{s \in S} X_2(s)p(s) + \dots + \sum_{s \in S} X_n(s)p(s) \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n] \end{aligned}$$

Esempio 9c. Si determini il valore atteso della somma dei risultati del lancio di n dadi equilibrati.

Soluzione: Sia X la somma degli n risultati. Calcoliamo $E[X]$ utilizzando la formula

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

dove X_i denota il valore ottenuto dal dado i -esimo. Poiché X_i assume ognuno dei valori dall'1 al 6 con uguale probabilità segue che

$$E[X_i] = \sum_{i=1}^6 i(1/6) = 21/6 = 7/2$$

che conduce al risultato

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = 3.5 n$$

Esempio 9d. Si determini il numero atteso di successi in n prove, quando la prova i -esima è un successo con probabilità p_i , $i = 1, \dots, n$.

Soluzione: Ponendo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la prova } i \text{ è un successo} \\ 0 & \text{se la prova } i \text{ è un fallimento} \end{cases}$$

possiamo scrivere

$$X = \sum_{i=1}^n X_i$$

Di conseguenza

$$E[X] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = \sum_{i=1}^n p_i$$

Si noti il fatto molto importante che non abbiamo richiesto che le prove siano tra loro indipendenti.

Il precedente risultato include come caso particolare quello del valore atteso di una variabile aleatoria binomiale, caso nel quale le prove sono supposte tra loro indipendenti e le probabilità $p_i = p$, che ha valore atteso pari a np . Esso però fornisce anche il valore atteso di una variabile aleatoria ipergeometrica, che conta il numero di palline bianche tra le n estratte senza reinserimento da una scatola che contenga inizialmente N palline delle quali m siano bianche. Possiamo interpretare questa variabile come il numero di successi in n prove, dove la prova i -esima è detta un successo se la i -esima pallina estratta è bianca. Poiché la i -esima pallina selezionata può essere con uguale probabilità ognuna della N presenti nella scatola inizialmente e quindi ha probabilità pari a m/N di essere bianca, segue che una variabile ipergeometrica risulta uguale al numero di successi in n prove nelle quali ogni prova ha probabilità di successo pari a $p = m/N$. Quindi, seppure queste prove siano tra loro dipendenti, segue dalla precedente formula che il valore atteso di una variabile ipergeometrica è pari a nm/N . ■

Esempio 9e. Si determini una espressione per la varianza del numero di successi dell'Esempio 9d e la si applichi per ottenere la varianza di una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p e di una variabile ipergeometrica di parametri n , N e m .

Soluzione: Se X rappresenta il numero di successi, la stessa rappresentazione per X del precedente esempio, ovvero $X = \sum_{i=1}^n X_i$, dà

$$\begin{aligned} E[X^2] &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \left(\sum_{j=1}^n X_j \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n X_i \left(X_i + \sum_{j \neq i} X_j \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= E \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= \sum_{i=1}^n E[X_i^2] + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E[X_i X_j] \\ &= \sum_i p_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} E[X_i X_j] \end{aligned} \quad (9.1)$$

dove l'espressione finale sfrutta il fatto che $X_i^2 = X_i$. Tuttavia, poiché i possibili valori di X_i e X_j sono 0 o 1, segue che

$$X_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i = 1, X_j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Perciò

$$E[X_i X_j] = P\{X_i = 1, X_j = 1\} = P(i \text{ e } j \text{ siano successi})$$

Da una parte, se X è una variabile binomiale, allora, per $i \neq j$ i risultati della prova i -esima e j -esima sono indipendenti e ognuno di essi sarà un successo con probabilità p . Quindi

$$E[X_i X_j] = p^2, \quad i \neq j$$

Questo, assieme all'equazione (9.1), dà che per una variabile binomiale

$$E[X^2] = np + n(n-1)p^2$$

da cui

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p)$$

Dall'altra parte, se X è una variabile ipergeometrica, allora, supposto che venga estratta una pallina bianca alla prova i -esima, ognuna delle altre $N-1$ palline, delle quali $m-1$ sono ora bianche, può essere estratta alla prova j -esima, per $j \neq i$. Di conseguenza, per $j \neq i$

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = P\{X_i = 1\}P\{X_j = 1 | X_i = 1\} = \frac{m}{N} \frac{m-1}{N-1}$$

Essendo $p_i = m/N$, otteniamo grazie all'equazione (9.1)

$$E[X^2] = \frac{nm}{N} + n(n-1) \frac{m}{N} \frac{m-1}{N-1}$$

Allora

$$\text{Var}[X] = \frac{nm}{N} + n(n-1) \frac{m}{N} \frac{m-1}{N-1} - \left(\frac{nm}{N} \right)^2$$

che, come mostrato nell'Esempio 8j, può essere semplificato conducendo a

$$\text{Var}[X] = np(1-p) \left(1 - \frac{n-1}{N-1} \right)$$

dove $p = m/N$. ■

4.10 PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DI DISTRIBUZIONE

Per iniziare ricordiamo che, data la funzione di distribuzione F di X , $F(b)$ denota la probabilità che la variabile aleatoria X assuma i valori minori o uguali a b . Alcune proprietà della funzione di distribuzione (f.d.) F sono

1. F è una funzione non decrescente: cioè se $a < b$, allora $F(a) \leq F(b)$.
2. $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 1$.
3. $\lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) = 0$.
4. F è continua a destra. Cioè, fissato un valore b e una successione decrescente b_n , $n \geq 1$, che converge a b , $\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n) = F(b)$.

La Proprietà 1 segue, come si era notato nella Sezione 4.1, poiché per $a < b$ l'evento $\{X \leq a\}$ è contenuto nell'evento $\{X \leq b\}$ e così non potrà avere una probabilità maggiore. Le Proprietà 2, 3 e 4 seguono tutte dalla proprietà di continuità delle probabilità (Sezione 2.6). Per esempio, per provare la Proprietà 2 notiamo che se b_n cresce a ∞ , allora gli eventi $\{X \leq b_n\}$, $n \geq 1$ formano una successione crescente la cui unione è pari all'evento $\{X < \infty\}$. Quindi, per la proprietà di continuità delle probabilità,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X \leq b_n\} = P\{X < \infty\} = 1$$

che prova la seconda proprietà.

La dimostrazione della terza proprietà è simile e la lasciamo come esercizio. Per provare l'ultima proprietà, notiamo che se b_n decresce a b , allora $\{X \leq b_n\}$, $n \geq 1$ formano una successione di eventi decrescente la cui intersezione coincide con $\{X \leq b\}$. Quindi la proprietà di continuità fa sì che

$$\lim_n P\{X \leq b_n\} = P\{X \leq b\}$$

e la Proprietà 4 risulta verificata.

A molte domande sulle probabilità relative a un variabile aleatoria X possiamo rispondere in termini della f.d. F . Per esempio,

$$P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) \quad \text{per ogni } a < b \quad (10.1)$$

Questo può essere provato scrivendo l'evento $\{X \leq b\}$ come l'unione disgiunta degli eventi $\{X \leq a\}$ e $\{a < X \leq b\}$. Cioè,

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$$

così

$$P\{X \leq b\} = P\{X \leq a\} + P\{a < X \leq b\}$$

che stabilisce la Formula (10.1).

Se vogliamo calcolare la probabilità che X sia strettamente minore del valore b , possiamo di nuovo applicare la proprietà di continuità per ottenere

$$\begin{aligned} P\{X < b\} &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{X \leq b - \frac{1}{n}\right\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(X \leq b - \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(b - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Si noti che $P\{X < b\}$ non è necessariamente uguale a $F(b)$, poiché $F(b)$ include anche la probabilità che X sia uguale a b .

Esempio 9a. La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Il grafico di $F(x)$ è presentato in Figura 4.8. Si calcoli:

- (a) $P\{X < 3\}$,
- (b) $P\{X = 1\}$,
- (c) $P\{X > \frac{1}{2}\}$,
- (d) $P\{2 < X \leq 4\}$.

Soluzione (a) $P\{X < 3\} = \lim_n P\left\{X \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_n F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$

$$\begin{aligned} \text{(b) } P\{X = 1\} &= P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} \\ &= F(1) - \lim_n F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

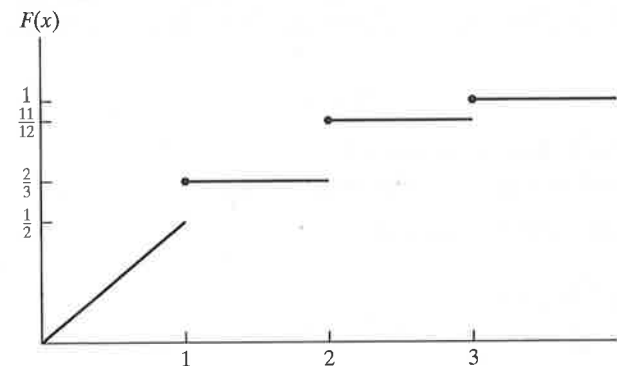


Figura 4.8 Grafico di $F(x)$.

$$(c) P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} = 1 - P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \\ = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$(d) P\{2 < X \leq 4\} = F(4) - F(2) \\ = \frac{1}{12}$$

RIASSUNTO

Una funzione a valori reali definita sullo spazio campionario è detta *variabile aleatoria*. Se X è una variabile aleatoria, allora la funzione $F(x)$, definita come

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

è detta *funzione di distribuzione* di X . Tutte le probabilità relative a X possono essere espresse in funzione di F .

Una variabile aleatoria che assuma un insieme finito o al più infinito numerabile di valori è detta *discreta*. Se X è una variabile aleatoria discreta, allora la funzione

$$p(x) = P\{X = x\}$$

è detta *densità discreta* di X . Inoltre la quantità $E[X]$, definita da

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x)$$

è detto il *valore atteso* di X . $E[X]$ è anche comunemente chiamato la *media* di X .

Un'utile identità stabilisce che, data una funzione g ,

$$E[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x)$$

La *varianza* di una variabile aleatoria X , denotata con $\text{Var}(X)$, è definita come

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2]$$

La varianza, che è uguale al valore atteso della distanza al quadrato di X dal suo valore atteso, è una misura della dispersione dei possibili valori di X . Un'utile identità stabilisce che

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

La quantità $\sqrt{\text{Var}(X)}$ è detta la *deviazione standard* di X .

Elenchiamo ora alcune delle variabili aleatorie discrete più famose.

La variabile aleatoria X la cui densità discreta è data da

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, \dots, n$$

è detta essere una variabile aleatoria *binomiale* di parametri n e p . Una tale variabile aleatoria può essere interpretata come il numero di successi che si verificano quando eseguiamo in maniera indipendente n prove, ognuna delle quali ha probabilità pari a p di risultare in un successo. Il valore atteso e la varianza di questa variabile aleatoria è pari a

$$E[X] = np \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

La variabile aleatoria X la cui densità discreta è data da

$$p(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \quad i \geq 0$$

è detta essere una variabile aleatoria di *Poisson* di parametro λ . Se eseguiamo un grande numero di prove indipendenti (o quasi), ognuna delle quali ha una probabilità piccola di risultare in un successo, allora il numero totale di successi si distribuisce approssimativamente secondo una legge di Poisson. Il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria di Poisson sono pari al parametro λ . Cioè

$$E[X] = \text{Var}(X) = \lambda$$

La variabile aleatoria X la cui densità discreta è data da

$$p(i) = p(1-p)^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots$$

è detta essere una variabile aleatoria *geometrica* di parametro p . Una tale variabile aleatoria può essere interpretata come il numero di prove indipendenti che è necessario eseguire per ottenere il primo successo, supponendo di nuovo che ognuna della prove ha probabilità pari a p di risultare in un successo. Il valore atteso e la varianza di questa variabile aleatoria sono pari a

$$E[X] = \frac{1}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

La variabile aleatoria X la cui densità discreta è data da

$$p(i) = \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r} \quad i \geq r$$

è detta essere una variabile aleatoria *binomiale negativa* di parametri r e p . Una tale variabile aleatoria può essere interpretata come il numero di prove indipendenti che è necessario eseguire per ottenere l' r -esimo successo, supponendo di nuovo che ognuna della prove ha probabilità pari a p di risultare in un successo. Il valore atteso e la varianza di questa variabile aleatoria sono pari a

$$E[X] = \frac{r}{p} \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Una variabile aleatoria *ipergeometrica* di parametri n , N e m rappresenta il numero di palline bianche che si ottengono estraendo un blocco di n palline (o n palline senza reinserimento) da un'urna che ne contiene N , di cui esattamente m sono bianche. La sua densità discreta è data da

$$p(i) = \frac{\binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \quad i = 0, \dots, m$$

Posto $p = m/N$, la sua media e varianza sono pari a

$$E[X] = np \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

Un'importante proprietà del valore atteso è che il valore atteso della somma di variabili aleatorie è uguale alla somma dei loro valori attesi. Vale cioè

$$E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

ESERCIZI

1. Due palline vengono scelte a caso da un'urna che contiene 8 palline bianche, 4 nere e 2 gialle. Supponiamo che si vincano 2 euro per ogni pallina nera estratta e se ne perda uno per ogni pallina bianca estratta. Denotiamo con X la vincita. Quali sono i possibili valori di X e con quali probabilità vengono ottenuti?
2. Due dadi equilibrati vengono lanciati. Sia X uguale al prodotto dei due dadi. Si calcoli $P\{X = i\}$ per $i = 1, 2, \dots$
3. Lanciamo tre dadi. Supponendo che ognuno dei $6^3 = 216$ possibili risultati sia equiprobabile, si trovino le probabilità relative ai singoli valori che X può ottenere, dove X rappresenta la somma dei 3 dadi.
4. Cinque uomini e cinque donne sostengono un esame e vengono messi in ordine secondo i risultati ottenuti. Si supponga che non ci siano due esiti uguali e che tutti i 10! possibili ordinamenti siano equiprobabili. Denotiamo con X la migliore posizione ottenuta da una donna (per esempio, $X = 1$ se il primo classificato è una donna). Si trovi $P\{X = i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8, 9, 10$.
5. Denotiamo con X la differenza tra il numero di teste e il numero di croce ottenuti in n lanci di una moneta. Quali sono i possibili valori di X ?
6. Nell'Esercizio 5, se la moneta è assunta equilibrata, per $n = 3$ quali sono le probabilità associate ai valori che X può assumere?
7. Supponiamo di lanciare due volte un dado. Quali sono i possibili valori che le seguenti variabili aleatorie possono assumere:
 - (a) il valore massimo che appare nei due lanci;
 - (b) il minimo valore che appare nei due lanci;
 - (c) la somma dei valori dei due lanci;
 - (d) il valore del primo lanci meno quello del secondo?
8. Se il dado dell'Esercizio 7 è supposto equilibrato, si calcolino le probabilità associate alle quattro variabili aleatorie lì definite.
9. Si ripeta l'Esempio 1c quando le palline estratte sono reinserite.
10. Indichiamo con X le vincite di un giocatore. Sia $p(i) = P(x = i)$ e supponiamo che

$$p(0) = 1/3; p(1) = p(-1) = 13/55;$$

$$p(2) = p(-2) = 1/11; p(3) = p(-3) = 1/165$$

Si calcoli la probabilità condizionata che il giocatore vinca i , $i = 1, 2, 3$, sapendo che ha ottenuto una vincita positiva.

11. (a) Un intero N deve essere scelto a caso tra i numeri $\{1, 2, \dots, (10)^3\}$, nel senso che ognuno dei precedenti numeri interi ha la medesima probabilità di essere selezionato. Qual è la probabilità che N sia divisibile per 3? Per 5? Per 7? Per 15? Per 105? Come cambierebbe la risposta se rimpiazzassimo $(10)^3$ con $(10)^k$ e k diventa via via più grande?
- (b) Una funzione importante nella teoria dei numeri – una le cui proprietà possono essere messe in relazione con quello che probabilmente è il più importante problema non dimostrato della matematica, l'ipotesi di Riemann – è la funzione di Moebius $\mu(n)$, definita per tutti i valori interi positivi n come segue: scriviamo n come prodotto dei suoi fattori primi. Se un fattore è presente più volte, come in $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ o $49 = 7 \cdot 7$, allora $\mu(n)$ è definita uguale a 0. Ora scegliamo N a caso tra $\{1, 2, \dots, (10)^k\}$, dove k è grande. Si determini $P\{\mu(N) = 0\}$ quando $k \rightarrow \infty$.

SUGGERIMENTO: Per calcolare $P\{\mu(N) \neq 0\}$, si usi l'identità

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{P_i^2 - 1}{P_i^2} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{48}{49}\right) \dots = \frac{6}{\pi^2}$$

dove P_i è l' i -esimo più piccolo primo. (non includiamo 1 tra i numeri primi).

12. Nel gioco della Morra a due dita, 2 giocatori mostrano 1 o 2 dita e simultaneamente cercano di indovinare dicendo quante dita l'avversario mostrerà. Se solo uno dei due giocatori indovina il numero di dita, vince un totale (in euro) pari alla somma del numero di dita mostrate dai due giocatori. Se entrambi i giocatori indovinano o nessuno lo fa, allora nessuno vince nulla. Si consideri uno dei due giocatori e si denoti con X il totale di euro che vince in una singola partita di questo gioco.
 - (a) Se ognuno dei due giocatori agisce indipendentemente dall'altro e gioca e cerca di indovinare in maniera puramente casuale (ovvero le quattro possibili combinazioni di giocata e ipotesi sulla giocata dell'avversario sono equiprobabili), quali sono i possibili valori che X può assumere e con quale probabilità?
 - (b) Supponiamo che ognuno dei due giocatori agisca indipendentemente dall'altro. Se ognuno dei giocatori decide di mostrare lo stesso numero di dita che supporterà che mostri il suo avversario e che mostri con uguale probabilità 1 o 2 dita, quali sono i possibili valori che X può assumere e con quale probabilità?
13. Un venditore ha fissato due appuntamenti per vendere una enciclopedia. Il suo primo appuntamento lo porterà a vendere una enciclopedia con probabilità pari a 0.3 e il secondo con probabilità pari a 0.6. Ogni vendita ha la stessa probabilità di riguardare l'edizione di lusso (del valore di 1000 euro) o quella standard (del valore di 500 euro). Si determini la densità discreta di X , la variabile aleatoria che conta il totale dei guadagni del venditore.
14. Cinque numeri distinti vengono assegnati a caso a cinque giocatori. Quando due giocatori confrontano i propri numeri, vince chi ha il numero più grande. Inizialmente, i giocatori 1 e 2 confrontano i propri numeri; il vincitore allora confronta il suo numero con il giocatore 3, e così via. Denotiamo con X il numero di volte che il giocatore 1 vince. Si determini $P\{X = i\}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
15. La lotteria delle scelte della National Basketball Association (NBA) coinvolge ogni anno le 11 squadre con il peggior rapporto di vittorie-sconfitte della stagione regolare. Un totale di 66 palline vengono inserite in un'urna. Ognuna delle palline è contrassegnata con il simbolo di una di queste squadre: 11 hanno quello della squadra con il peggior record della lega, 10 hanno quello della seconda peggiore squadra, 9 hanno quello della terza peggiore e così via. Una pallina viene scelta a caso e la squadra rappresentata su questa pallina ha diritto alla prima scelta tra i giocatori eleggibili. Quindi viene estratta una seconda pallina: se rappresenta una squadra diversa da quella che ha avuto la prima scelta, allora questa nuova squadra ha diritto alla seconda scelta. In caso contrario (cioè se anche sulla seconda pallina è rappresentata la prima squadra) allora la pallina viene

messa da parte e si procede a una nuova estrazione finché non si ottiene una pallina relativa a una squadra diversa. Alla fine si estrae una terza pallina (sempre che non se ne siano dovute scartare di uguali prima): se essa si riferisce a una terza squadra, questa guadagna la terza scelta. Se invece è ancora estratta una delle squadre che hanno avuto diritto alle prime due scelte, si mette da parte la pallina e si procede a nuove estrazioni fintanto che non si ottiene una terza squadra diversa. Determinata la terza scelta, le altre 8 scelte vengono assegnate alle rimanenti 8 squadre nell'ordine di classifica (quella con il record peggiore rimasta avrà la quarta scelta e così via). Denotiamo con X la variabile aleatoria che indica quale scelta è toccata alla squadra con il peggior record. Si determini la sua densità discreta.

16. Nell'Esercizio 15, sia la squadra numero 1 quella con il peggior record, la squadra numero 2 quella con il secondo peggior record e così via. Denotiamo con Y_i la squadra che ottiene la scelta numero i . Quindi $Y_1 = 3$ significherà che la prima pallina scelta apparteneva alla squadra numero 3. Si determini la densità discreta di:

- (a) Y_1 ,
- (b) Y_2 ,
- (c) Y_3 .

17. Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & 3 \leq b \end{cases}$$

- (a) Calcolare $P\{X = i\}, i = 1, 2, 3$.

- (b) Calcolare $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$.

18. Si lancia quattro volte una moneta equilibrata. Denotiamo con X il numero totale di testa ottenute. Si disegni un grafico della densità discreta della variabile aleatoria $X - 2$.

19. Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 3 \\ \frac{9}{10} & 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & b \geq 3.5 \end{cases}$$

Si calcoli la densità discreta associata a questa distribuzione.

20. Un libro delle scommesse suggerisce la seguente "strategia vincente" per il gioco della roulette. Raccomanda che si scommetta un euro sul rosso. Se esce il rosso (che ha probabilità pari a $\frac{18}{38}$ di uscire), allora il giocatore deve prendere la sua vincita di 1 euro e andarsene. Se invece perde la prima giocata (evento di probabilità pari a $\frac{20}{38}$), deve fare una ulteriore giocata di 1 euro per i successivi due giri della roulette e quindi lasciare il gioco. Denotiamo con X la variabile aleatoria che indica la vincita del giocatore quando lascia il tavolo.

- (a) Si determini $P\{X > 0\}$.

- (b) Siete d'accordo che questa sia effettivamente una "strategia vincente"? Giustificare la risposta.

- (c) Si determini $E[X]$.
21. Quattro autobus portano 148 studenti allo stadio del football. Gli autobus portano, rispettivamente, 40, 33, 25 e 50 studenti. Scegliamo a caso uno degli studenti. Denotiamo con X il numero degli studenti che hanno viaggiato sull'autobus dello studente scelto a caso. Scegliamo ora a caso uno dei conducenti dei bus e denotiamo con Y il numero degli studenti che hanno viaggiato sul suo autobus.

- (a) Quale tra $E[X]$ e $E[Y]$ pensate sia più grande? Perché?

- (b) Si calcolino $E[X]$ e $E[Y]$.

22. Supponiamo che due squadre giochino una serie di partite che si concludono quando la prima squadra ha ottenuto l' i -esima vittoria. Supponiamo che la squadra A vinca ogni partita, in maniera indipendente dalle altre, con probabilità pari a p . Si determini il numero atteso di partite che vengono giocate quando:

- (a) $i = 2$;

- (b) $i = 3$.

Si provi inoltre che in entrambi i casi la probabilità è massima quando $p = \frac{1}{2}$.

23. Voi avete 1000 euro e una merce che vi interessa è attualmente venduta a 2 euro all'etto. Supponiamo che dopo una settimana la merce verrà venduta a 1 euro oppure a 4 euro all'etto, dove queste due possibilità saranno equiprobabili.

- (a) Se il vostro obiettivo è di massimizzare il capitale atteso che possedete alla fine della prossima settimana, che strategia utilizzerete?

- (b) Se il vostro obiettivo è di possedere alla fine della prossima settimana la maggior quantità attesa di merce, che strategia utilizzerete?

24. A e B giocano al seguente gioco: A scrive un numero 1 o 2 e B deve indovinare quale numero ha scritto. Se A ha scritto il numero i e B lo ha indovinato, B riceve i euro da A . Se B sbaglia, paga $\frac{3}{4}$ di euro a A . Se B randomizza la propria decisione scegliendo 1 con probabilità pari a p e 2 con probabilità pari a $1 - p$, si determini il suo guadagno atteso se

- (a) A ha scritto il numero 1;

- (b) A ha scritto il numero 2.

Quale valore di p massimizza il minimo possibile guadagno atteso di B e quanto vale questo minimo guadagno? (Si noti che il guadagno atteso di B dipende non solo da p , ma anche da che cosa scriverà A).

Consideriamo ora il giocatore A . Supponiamo che anche lui randomizzi la propria scelta scrivendo il numero 1 con probabilità q . Qual è la perdita attesa di A se

- (c) B sceglie il numero 1;

- (d) B sceglie il numero 2?

Quale valore di q minimizza la massima possibile perdita attesa di A ? Si provi che questo valore è uguale al precedente valore riferito a B . Questo risultato, noto come il teorema del minimax, venne stabilito nel caso generale dal matematico John von Neumann ed è uno dei principali risultati della disciplina matematica nota come teoria dei giochi. Il valore comune determinato prima è detto il valore del gioco per il giocatore B .

25. Dobbiamo lanciare due monete. La prima moneta darà testa con probabilità 0.6, mentre la seconda con probabilità 0.7. Supponiamo che i risultati dei due lanci siano tra loro indipendenti e definiamo X uguale al numero totale di teste ottenute.

- (a) Si calcoli $P[X = 1]$.

- (b) Si determini $E[X]$.

26. Viene scelto a caso uno dei numeri compresi tra 1 e 10. Voi dovete tentare di indovinarlo facendo domande con risposta sì o no. Si calcoli il numero atteso di domande che dovete fare per determinare il valore del numero nei 2 casi seguenti:

- (a) La vostra i -esima domanda è: "Il numero è i ?", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

- (b) Con ogni domanda cercate di eliminare metà dei numeri rimanenti.

27. Una compagnia di assicurazioni emette una polizza che pagherà una certa quantità A di euro se l'evento E si verificherà entro un anno. Se la compagnia stima che E si verificherà

entro un anno con probabilità pari a p , quale dovrebbe essere il costo della polizza per il cliente in modo che il profitto atteso per la compagnia sia del 10 per cento di A ?

28. Un campione di 3 elementi viene scelto a caso da una scatola contenete 20 articoli dei quali 4 sono difettosi. Si trovi il numero atteso degli articoli difettosi nel campione.
29. Ci sono due possibili cause per la rottura di una macchina. Per controllare la prima causa si spendono C_1 euro e, se questa era effettivamente la causa del non funzionamento, il costo di riparazione è pari a R_1 euro. In maniera simile, ci sono costi pari a C_2 e R_2 associati alla seconda possibilità. Denotiamo con $1 - p$ e p , rispettivamente, le probabilità che la rottura sia dovuta dalla prima e la seconda possibilità. Sotto quali condizioni su p , C_i , R_i , $i = 1, 2$, si dovrebbe prima controllare la prima causa di rottura e poi la seconda, piuttosto che nell'ordine opposto, per minimizzare il costo atteso della riparazione?

NOTA: Se il primo controllo è negativo, dobbiamo ancora verificare l'altra possibilità.

30. Una persona lancia una moneta equilibrata finché non ottiene croce per la prima volta. Se appare croce all' n -esimo lancio, la persona vince 2^n euro. Denotiamo con X il guadagno del giocatore. Si provi che $E[X] = +\infty$. Questo problema è noto come il paradosso di San Pietroburgo.
- (a) Sareste d'accordo di pagare 1 milione di euro per giocare a questo gioco?
- (b) Sareste d'accordo di pagare 1 milione di euro per ogni partita se poteste giocare quante volte volete e doveste pagare solo quando decidete di smettere di giocare?
31. Ogni sera differenti meteorologi danno la probabilità che il giorno seguente piova. Per giudicare quanto siano accurate le loro previsioni, assegniamo i seguenti punteggi: se un meteorologo dice che piovierà con probabilità pari a p , allora riceverà i seguenti punti.

$$\begin{array}{ll} 1 - (1 - p)^2 & \text{se piovierà} \\ 1 - p^2 & \text{se non piovierà} \end{array}$$

Teniamo conto di questi punteggi per un certo lasso di tempo e alla fine decreteremo che il meteorologo con il punteggio più alto sarà quello che dà le previsioni più accurate. Supponiamo che uno di essi sia a conoscenza di questo e voglia massimizzare il suo punteggio atteso. Se questa persona è effettivamente convinta che domani piovierà con probabilità p^* , quale valore di p dovrà prevedere per massimizzare il suo punteggio atteso?

32. Per determinare se hanno o meno una certa malattia, 100 persone si sottopongono a un esame del sangue. Tuttavia, invece che fare il test a ogni singola persona separatamente, si decide di raggrupparli inizialmente in gruppi di 10 persone. Il campione di sangue di queste 10 persone viene mischiato assieme e quindi analizzato. Se il test è negativo, un solo esame sarà sufficiente per 10 persone; altrimenti, se il test risulta positivo, lo si ripete per ogni singola persona e così in totale si saranno fatti 11 test relativamente a questo gruppo. Supponiamo che la probabilità che ogni persona presenti la malattia sia pari a 0.1, in maniera indipendente dagli altri individui, e si calcoli il numero atteso di test che si dovranno effettuare per ogni gruppo. (Si noti che stiamo assumendo che il test di gruppo è positivo se almeno una persona nel gruppo ha la malattia).
33. Un giornalaio compra i quotidiani per 10 centesimi di euro e li rivende a 15, però non può restituire le copie invendute. Se la sua domanda giornaliera di quotidiani è una binomiale di parametri $n = 10$, $p = \frac{1}{3}$, approssimativamente quanti giornali deve comprare per massimizzare il suo profitto atteso?
34. Nell'Esempio 4b, supponiamo che il negozio subisca un ulteriore costo di c euro per ogni domanda non soddisfatta. (Questo è spesso citato come un costo di fiducia perché il negozio perde la fiducia di quei clienti le cui richieste non possono essere soddisfatte). Si calcoli il profitto atteso quando il negozio immagazzina s unità di merce, e si determini il valore s che lo massimizza.

35. Una scatola contiene 5 bilie rosse e 5 bilie blu. Estraiamo 2 bilie a caso. Se hanno il medesimo colore, vinciamo 1.10 euro; in caso contrario vinciamo -1.00 euro (cioè perdiamo 1.00 euro). Si calcoli
- (a) il valore atteso della vincita;
- (b) la varianza della vincita.
36. Si consideri l'Esercizio 22 con $i = 2$. Si trovi la varianza del numero di partite giocate e si dimostri che questo numero è massimo per $p = \frac{1}{2}$.
37. Si trovi $\text{Var}(X)$ e $\text{Var}(Y)$ per X e Y dati nell'Esercizio 21.
38. Se $E[X] = 1$ e $\text{Var}(X) = 5$, si trovi
- (a) $E[(2 + X)^2]$;
- (b) $\text{Var}(4 + 3X)$.
39. Estraiamo una pallina da un'urna che ne contenga 3 bianche e 3 nere. Dopo che abbiamo estratto la pallina, la reinseriamo nell'urna e estraiamo una seconda pallina. Procediamo in questo modo indefinitivamente. Qual è la probabilità che delle quattro palline estratte, esattamente 2 siano bianche?
40. In un esame a risposta multipla con 3 possibili risposte per ognuna delle 5 domande, qual è la probabilità che uno studente risponda a 4 o più domande correttamente tentandole in maniera casuale?
41. Un uomo afferma di avere poteri extrasensoriali. Come test, viene lanciata 10 volte una moneta equilibrata e si chiede all'uomo di prevederne l'esito in anticipo. Lui indovina 7 dei 10 risultati. Qual è la probabilità che lo abbia indovinato se non è dotato dei suddetti poteri (ovvero ha agito in maniera casuale)?
42. Attilio e Bernardo sostengono un test uguale formato da 10 domande. Attilio risponderà correttamente ad ogni domanda con probabilità pari a 0.7, in maniera indipendente dalle altre domande. Bernardo risponderà correttamente ad ogni domanda con probabilità pari a 0.4, in maniera indipendente dalle altre domande e dalle risposte date da Attilio.
- (a) Si determini il numero atteso di domande alle quali abbiano risposto correttamente entrambi.
- (b) Si determini la varianza del numero di domande alle quali abbia risposto esattamente solo uno dei due.
43. Un canale di comunicazione trasmette i numeri 0 e 1. Tuttavia, a causa dell'elettricità statica, i numeri trasmessi vengono ricevuti in maniera non corretta con probabilità pari a 0.2. Supponiamo che vogliamo trasmettere un messaggio importante consistente di un numero binario. Per ridurre la possibilità di errore, trasmettiamo 00000 al posto di 0 e 11111 al posto di 1. Se chi riceve il messaggio usa una decodifica a maggioranza (ogni 5 cifre le interpreta come uno 0 se ci sono più 0 che 1 e viceversa come un 1 se ci sono più 1 che 0), qual è la probabilità che il messaggio venga decodificato in maniera errata? Che ipotesi di indipendenza state facendo?
44. Un sistema satellitare è formato da n componenti e in un dato giorno è funzionante se almeno k dei suoi componenti lo sono. In un giorno di pioggia ognuno dei componenti in maniera indipendente dagli altri funziona con probabilità pari a p_1 , mentre in un giorno senza pioggia questa probabilità vale p_2 . Se la probabilità che domani piova è pari a α , qual è la probabilità che il sistema satellitare funzioni?
45. Uno studente si sta preparando per sostenere un esame orale e si preoccupa se quel giorno interrogherà l'assistente o il professore titolare del corso. Nel primo caso avrà probabilità pari a 0.8 di rispondere a ognuna delle domande postegli, in maniera indipendente l'una dall'altra. Nel caso sia il professore a interrogarlo, questa probabilità sarà pari a 0.4. Supponiamo che lo studente passi l'esame se risponde a più della metà delle domande. Se lo studente pensa di avere probabilità doppia di fare l'esame con il professore piuttosto che con l'assistente (legge di Murphy), dovrebbe sperare che gli vengano fatte 3 o 5 domande?

46. Supponiamo che servano almeno 9 degli undici voti di una giuria di 12 componenti per condannare un imputato e che la probabilità che un giurato voti innocente un colpevole è pari a 0.2, mentre che voti colpevole un innocente è pari a 0.1. Se ogni giurato opera in maniera indipendente dagli altri e se il 65 per cento degli imputati è colpevole, si determini la probabilità che la giuria prenda una decisione corretta. Qual è la percentuale degli imputati condannati?
47. Alcune giurie militari sono formate da 9 giudici. Tuttavia, sia la difesa che l'accusa possono contestare qualche giudice, nel qual caso esso viene rimosso e non rimpiazzato. Un imputato è dichiarato colpevole se la maggioranza dei giudici lo vota colpevole ed è dichiarato innocente nel caso contrario. Supponiamo che quando l'imputato è effettivamente colpevole, ogni giudice (in modo indipendente) lo voti colpevole con probabilità pari a 0.7, mentre quando l'imputato è innocente questa probabilità scenda a 0.3.
- (a) Qual è la probabilità che un imputato colpevole sia dichiarato colpevole quando ci sono (i) 9, (ii) 8 e (iii) 7 giudici?
- (b) Si ripeta il precedente calcolo per un imputato innocente.
- (c) Se l'accusa decide di non contestare nessun giudice e la difesa ne può contestare al più 2, quanti conviene che ne contesti se è certa al 60 per cento che il suo cliente sia colpevole?
48. Si sa che i dischetti prodotti da una certa azienda sono difettosi con probabilità pari a 0.01 in maniera indipendente l'uno dall'altro. L'azienda vende i dischetti in confezioni da 10 e offre una garanzia di rimborso nel caso in cui almeno 1 dei dischetti sia difettoso. Se una persona acquista 3 scatole, qual è la probabilità che ne restituisca esattamente 1 scatola?
49. Quando la moneta 1 viene lanciata, si ottiene testa con probabilità pari a 0.4; quando viene lanciata la moneta 2, ciò avviene con probabilità pari a 0.7. Scegliamo a caso una di queste monete e la lanciamo 10 volte.
- (a) Qual è la probabilità che esattamente 7 dei 10 lanci diano testa?
- (b) Dato che il primo lancio ha dato testa, quanto vale la probabilità condizionata che esattamente 7 dei 10 lanci diano testa?
50. Supponiamo che una moneta non equilibrata dia testa con probabilità pari a p e che venga lanciata 10 volte. Sapendo che testa esce 6 volte, si trovi la probabilità condizionata che i primi 3 esiti siano stati:
- (a) T, C, C;
- (b) C, T, C.
51. Il numero atteso di errori tipografici in una pagina di una certa rivista è pari a 0.2. Qual è la probabilità che la pagina successiva che leggate abbia:
- (a) 0 errori;
- (b) 2 o più errori tipografici.
- Si giustifichi la risposta.
52. Il numero medio mensile di incidenti di aerei commerciali in tutto il mondo è pari a 3.5. Qual è la probabilità che ci siano
- (a) almeno 2 incidenti il prossimo mese;
- (b) al più 1 incidente il prossimo mese?
- Si giustifichi la risposta.
53. L'anno scorso si sono celebrati all'incirca 80 000 matrimoni nello stato di New York. Si stimi la probabilità che almeno una di queste coppie abbia i due partner
- (a) nati il 30 aprile;
- (b) che compiono gli anni nel medesimo giorno.
- Si giustifichino le risposte.
54. Supponiamo che il numero atteso di veicoli abbandonati settimanalmente in una certa autostrada sia pari a 2.2. Si approssimi la probabilità che ci siano
- (a) nessun veicolo abbandonato la prossima settimana;
- (b) almeno 2 veicoli abbandonati la prossima settimana.
55. Una copisteria assume due tipografi. Il numero medio di errori per articolo commessi dal primo tipografo è pari a 3, mentre è pari a 4.2 per il secondo tipografo. Se l'articolo che leggete può essere stato composto con uguale probabilità da ognuno dei due tipografi, si approssimi la probabilità che non ci siano errori.
56. Di quante persone abbiamo bisogno perché la probabilità che almeno uno di loro abbia il tuo medesimo compleanno sia maggiore di $\frac{1}{2}$?
57. Supponiamo che il numero di incidenti che avvengono ogni giorno su un tratto di autostrada si distribuisca come una variabile di Poisson di parametro $\lambda = 3$.
- (a) Si trovi la probabilità che 3 o più incidenti avvengano oggi.
- (b) Si ripeta il precedente calcolo sotto l'ipotesi che almeno un incidente avvenga oggi.
58. Si confronti l'approssimazione di Poisson e la probabilità esatta calcolata con la variabile binomiale nei seguenti casi:
- (a) $P\{X = 2\}$ quando $n = 8, p = 0.1$;
- (b) $P\{X = 9\}$ quando $n = 10, p = 0.95$;
- (c) $P\{X = 0\}$ quando $n = 10, p = 0.1$;
- (d) $P\{X = 4\}$ quando $n = 9, p = 0.2$.
59. Se si acquista un biglietto della lotteria in 50 lotterie diverse, ognuno con una probabilità pari a $\frac{1}{100}$ di darci un premio, qual è la probabilità (approssimata) che si vinca un premio
- (a) almeno una volta;
- (b) esattamente una volta;
- (c) almeno due volte?
60. Il numero di volte che una persona si prende l'influenza in un anno si distribuisce come una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 5$. Supponiamo che un nuovo tipo di medicina (con un grande dosaggio di vitamina C) sia appena stata commercializzata affermando che essa riduce il parametro della variabile di Poisson a $\lambda = 3$ per il 75 per cento della popolazione. Per l'altro 25 per cento la medicina non ha effetti apprezzabili. Se un individuo prova la medicina per un anno e ha 2 influenze in quel periodo, quanto è probabile che la medicina sia stata per lui efficace?
61. La probabilità di ricevere un full in una mano di poker è approssimativamente pari a 0.0014. Si trovi una approssimazione della probabilità che in 1000 mani di poker si siano ricevuti almeno due full.
62. Si considerino n prove indipendenti, ognuna delle quali possa dare un esito $1, \dots, k$ con probabilità $p_1, \dots, p_k, \sum_{i=1}^k p_i = 1$. Si provi che, se tutti i p_i sono piccoli, allora la probabilità che nessun esito si realizzi più di una volta si può approssimare con $\exp(-n(n-1) \sum_i p_i^2/2)$.
63. Le persone entrano in un casinò al ritmo di 1 ogni 2 minuti.
- (a) Qual è la probabilità che nessuno entri tra le 12.00 e le 12.05?
- (b) Qual è la probabilità che almeno 4 persone entrino al casinò durante quell'intervallo di tempo?
64. Il tasso di suicidi in un dato stato è di 1 suicidio ogni 100 000 abitanti al mese.
- (a) Si trovi la probabilità che in una città di 400 000 abitanti di questa nazione, ci siano 8 o più suicidi in un dato mese.
- (b) Qual è la probabilità che ci siano almeno 2 mesi in un dato anno con più di 8 suicidi?
- (c) Contando il mese attuale come mese numero 1, qual è la probabilità che il primo mese con 8 o più suicidi sia il mese numero $i, i \geq 1$?
- Che ipotesi state facendo?
65. Una compagnia di soldati è formata da 500 uomini e ognuno in modo indipendente dagli altri può avere una certa malattia con probabilità pari a $1/10^3$. Questa malattia può essere rivelata con un esame del sangue e si decide di fare un prelievo a tutti i soldati e, mescolati i campioni, fare un unico test.

- (a) Qual è la probabilità (approssimata) che il test del sangue risulti positivo (e quindi almeno uno dei soldati abbia la malattia)?
Supponiamo ora che il test abbia dato esito positivo.
- (b) Qual è la probabilità, sotto questa ipotesi, che più di un soldato sia ammalato? Uno dei 500 soldati si chiama Pieri e sa di avere la malattia.
- (c) Qual è la probabilità che il soldato Pieri attribuisce all'evento che più di una persona sia malata?
Siccome il test raggruppato è stato positivo, le autorità hanno deciso di fare il test a ogni soldato separatamente. I primi $i - 1$ sono risultati negativi, e l' i -esimo, che è il soldato Pieri, è risultato positivo.
- (d) Come funzione di i , qual è la probabilità che ognuno dei successivi presenti la malattia?
66. Facciamo sedere $2n$ persone, formate da n coppie sposate, in maniera casuale (in modo che ogni possibile ordinamento sia equiprobabile) a una tavola rotonda. Denotiamo con C_i l'evento che la i esima coppia sia seduta fianco a fianco, $i = 1, \dots, n$.
- (a) Si determini $P(C_i)$.
- (b) Per $j \neq i$, si determini $P(C_j | C_i)$.
- (c) Quando n è grande, si approssimi la probabilità che nessuna coppia sposata sia seduta fianco a fianco.
67. Si risolva il precedente problema aggiungendo il vincolo che le persone sono sedute in modo che ad un uomo segua una donna e così via.
68. In risposta ad un attacco di dieci missili, vengono lanciati cinquecento missili antibalistici. Il bersaglio di ogni missile antibalistico è scelto in modo indipendente e la probabilità che sia uno qualsiasi dei dieci è la stessa. Se ogni missile antibalistico colpisce il bersaglio con probabilità pari a 0.1, si usi il Paradigma di Poisson per approssimare la probabilità che tutti i missili vengano abbattuti.
69. Lanciamo dieci volte una moneta equilibrata. Si determini la probabilità che ci sia una successione di 4 teste consecutive
- (a) utilizzando la formula provata nel testo;
- (b) utilizzando la formula ricorsiva provata nel testo;
- (c) Confrontate la vostra risposta con quella che si ottiene con l'approssimazione di Poisson.
70. Al tempo 0 una moneta, che dà testa con probabilità pari a p , viene lanciata e cade al suolo. Supponiamo che dia testa. A un istante scelto in accordo con un processo di Poisson di parametro λ , la moneta viene raccolta e lanciata. (Tra lanci successivi la moneta rimane al suolo). Qual è la probabilità che la moneta mostri la faccia con la testa al tempo t ?
- SUGGERIMENTO: Quale sarebbe la probabilità condizionata se fino all'istante t non avessero ulteriori lanci e quale se ce ne fossero?
71. Consideriamo una ruota della roulette consistente di 38 numeri - i numeri dall'1 al 36 più due zeri. Se il signor Bondi scommette sempre che esca un numero compreso tra l'1 e il 12, qual è la probabilità che
- (a) Bondi perda le prime 5 scommesse;
- (b) la sua prima vittoria si verifichi alla quarta scommessa?
72. Due squadre di basket si sfidano a una serie di incontri; il primo team che vince 4 partite è dichiarato vincitore della sfida. Supponiamo che una delle squadre sia più forte dell'altra e che vinca ogni singola partita con probabilità pari a 0.6, indipendentemente dagli altri incontri. Si trovi la probabilità che il team più forte vinca la sfida in esattamente i incontri, con $i = 4, 5, 6, 7$. Si confronti la probabilità che la squadra più forte vinca la sfida con la probabilità che la vinca in una sfida al meglio di tre partite (cioè si aggiudica la sfida il primo che vince due partite).
73. Supponiamo che nell'Esercizio 72 le due squadre si equivalgano e che ognuna vinca ogni singolo incontro con probabilità pari a $\frac{1}{2}$. Si trovi il numero atteso di partite che vengono giocate.

74. A una intervistatrice viene data una lista di possibili persone da intervistare. Se lei ha bisogno di intervistarne 5 e ognuno (indipendentemente) accetta di essere intervistato con probabilità pari a $\frac{2}{3}$, qual è la probabilità che la sua lista di possibili intervistati sia sufficiente per trovarne 5 se essa contiene:
- (a) 5 nomi;
- (b) 8 nomi?
- Nel caso ci siano 8 nomi, qual è la probabilità che l'intervistatrice parli con esattamente
- (c) 6 persone;
- (d) 7 persone della lista?
75. Una moneta equilibrata viene lanciata fino a quando appare per la decima volta testa. Denotiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di croce che si ottengono. Se ne calcoli la densità discreta.
76. Si risolva il problema di Banach della scatola di fiammiferi (Esempio 8e) sotto l'ipotesi che nella scatola di sinistra ci siano inizialmente N_1 fiammiferi e in quella di destra N_2 .
77. Nel problema di Banach della scatola di fiammiferi si determini la probabilità che al momento che la prima scatola viene privata dell'ultimo fiammifero (e quindi non al momento in cui successivamente la si trovasse vuota) l'altra scatola contenga esattamente k fiammiferi.
78. Un'urna contiene 4 palline bianche e 4 palline nere. Scegliamo a caso 4 palline. Se due di esse sono bianche e due sono nere, ci fermiamo. Altrimenti, rimettiamo le palline nell'urna e di nuovo estraiamo 4 palline in modo casuale. Continuiamo così finché non se ne peschino 2 bianche in un blocco di 4 estratte. Qual è la probabilità che facciamo esattamente n estrazioni di blocchi di 4 palline?
79. Supponiamo che un gruppo di 100 componenti elettronici ne contenga 6 difettosi e 94 funzionanti. Se X denota il numero dei componenti difettosi in un campione casuale di 10 componenti scelti dal gruppo di 100, si trovi
- (a) $P\{X = 0\}$;
- (b) $P\{X > 2\}$.
80. Un gioco popolare nei casinò del Nevada si chiama Keno e si gioca nel seguente modo: il casinò sceglie a caso 20 numeri compresi tra 1 e 80. Un giocatore può indipendentemente quindi scegliere tra uno e quindici numeri tra 1 e 80: si realizza una vittoria se almeno un numero scelto dal giocatore coincide con uno di quelli scelti dal casinò. Inoltre la vincita è una funzione che dipende da quanti sono i numeri scelti dal giocatore e da quanti di questi sono stati scelti anche dal casinò. Per esempio, se il giocatore ha scelto un solo numero, allora vince se questo è compreso tra i venti numeri scelti dal casinò e la vincita sarà di 2.2 volte i soldi scommessi, cioè per ogni dollaro scommesso se ne riceveranno 2.2. Essendo in questo caso la probabilità di vittoria pari a $\frac{1}{4}$, è chiaro che la vincita equa dovrebbe essere di 3 dollari per ogni dollaro scommesso (perché?). Quando il giocatore sceglie 2 numeri, la vincita sarà di 12 dollari per ogni dollaro scommesso se entrambi i numeri saranno compresi tra i 20 del casinò.
- (a) Quale dovrebbe essere la vincita equa in questo caso?

Pagamenti di Keno per 10 numeri giocati

Numero di cifre coincidenti	Dollari vinti per ogni dollaro giocato
0-4	-1
5	1
6	17
7	179
8	1 299
9	2 599
10	24 999

Sia ora $P_{n,k}$ la probabilità che esattamente k degli n numeri scelti dal giocatore siano contenuti tra i 20 selezionati dal casinò.

- (b) Si calcoli $P_{n,k}$.
- (c) La più tipica scommessa a Keno consiste nel selezionare 10 numeri. Per ogni scommessa, il casinò paga quanto riportato nella tabella a pagina precedente. Si calcoli la vincita attesa in questo caso.

81. Nell'Esempio 8i, qual è la percentuale degli i lotti difettosi che il rivenditore rifiuta? La si determini per $i = 1, 4$. Supposto che un lotto viene rifiutato, qual è la probabilità condizionata che esso contenga 4 componenti difettosi?
82. Un rivenditore compra i transistor a lotti di 20. La sua politica è di controllare 4 componenti di ogni singolo lotto e di accettarlo solo se tutti e 4 i campioni non sono difettosi. Se ogni componente in un lotto è difettoso, indipendentemente dagli altri, con probabilità pari a 0.1, qual è la percentuale di lotti che vengono rifiutati?
83. In una regione ci sono tre autostrade. Il numero di incidenti giornalieri su queste autostrade si distribuisce con legge di Poisson di parametri, rispettivamente, 0.3, 0.5 e 0.7. Si determini il numero medio di incidenti che accadranno oggi in ognuna di queste tre autostrade.
84. Supponiamo di mettere in maniera indipendente 10 palline in 5 scatole e per ogni pallina sia $p_i, \sum_{i=1}^5 p_i = 1$, la probabilità che finisca nella scatola i .
 - (a) Si determini il numero medio di scatole che rimarranno vuote.
 - (b) Si determini il numero medio di scatole che conterranno esattamente una pallina.
85. Ci sono k tipi di figurine. In maniera indipendente dal tipo di figurina precedentemente acquistata, ogni nuova figurina sarà del tipo i con probabilità $p_i, \sum_{i=1}^k p_i = 1$. Se collezioniamo n figurine, si determini il numero atteso di tipi di figurine diverse che avremo nella raccolta. Ciò significa determinare il numero medio di tipi di figurine che appaiano almeno una volta nella raccolta formata da n figurine.

ESERCIZI TEORICI

1. Ci sono N distinti tipi di figurine e ogni volta che ne compriamo una essa sarà, in maniera indipendente dai precedenti acquisti, del tipo i con probabilità pari a $P_i, i = 1, \dots, N$. Denotiamo con T il numero di figurine che dobbiamo acquistare per concludere la raccolta (ovvero per ottenerne una di ogni tipo). Si calcoli $P\{T = n\}$.
- SUGGERIMENTO: Si usi un argomento simile a quello dell'Esempio 1e.
2. Se X ha funzione di distribuzione F , qual è la funzione di distribuzione di e^X ?
 3. Se X ha funzione di distribuzione F , qual è la funzione di distribuzione di $\alpha X + \beta$, quando α e β sono costanti e $\alpha \neq 0$?
 4. Una variabile aleatoria X è detta avere la distribuzione di Yule-Simons se

$$P\{X = n\} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 1$$

- (a) Si provi che la precedente è effettivamente una distribuzione di probabilità, ovvero che $\sum_{n=1}^{\infty} P\{X = n\} = 1$.
- (b) Si provi che $E[X] = 2$.
- (c) Si provi che $E[X^2] = \infty$.

SUGGERIMENTO: Per il punto (a), si usi dapprima che $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}$ e quindi che $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$.

5. Sia N una variabile aleatoria non negativa a valori interi. Per ogni valore non negativo $a_j, j \geq 1$, si provi che

$$\sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + \dots + a_j)P\{N = j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\}$$

Quindi si dimostri che

$$E[N] = \sum_{i=1}^{\infty} P\{N \geq i\}$$

e

$$E[N(N+1)] = 2 \sum_{i=1}^{\infty} iP\{N \geq i\}$$

6. Sia X tale che

$$P\{X = 1\} = p = 1 - P\{X = -1\}$$

Si determini $c \neq 1$ tale che $E[c^X] = 1$.

7. Sia X una variabile aleatoria di valore atteso pari a μ e varianza pari a σ^2 . Si determini il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

8. Si calcoli $\text{Var}(X)$ se

$$P(X = a) = p = 1 - P(X = b)$$

9. Si mostri che la costruzione della distribuzione binomiale

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$

porta a una dimostrazione del teorema del binomio

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

quando x e y sono non negativi.

SUGGERIMENTO: Si ponga $p = \frac{x}{x+y}$.

10. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p . Si dimostri che

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

11. Si consideri una successione di n prove indipendenti, ognuna delle quali può risultare in un successo con probabilità pari a p . Se otteniamo k successi, si provi che ognuno delle $n!/[k!(n-k)!]$ possibili disposizioni dei k successi e degli $n-k$ insuccessi è equiprobabile.
12. Un'apparecchiatura è formata da n componenti messi in serie. Ogni singolo componente sarà funzionante indipendentemente dagli altri con probabilità pari a p . Qual è la probabilità che non ci siano due componenti vicini entrambi non funzionanti?

SUGGERIMENTO: Si condizioni rispetto al numero di componenti difettosi e si usino i risultati dell'Esempio 4c del Capitolo 1.

13. Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) . Qual valore di p massimizza la $P\{X = k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$? Questo è un esempio di un metodo statistico usato per stimare p quando si osservi una variabile aleatoria binomiale uguale a k . Se supponiamo che n è noto, allora stimiamo p con il valore di p che massimizza $P\{X = k\}$, $k = 0, 1, \dots, n$? Questo metodo è noto con il nome di stima di massima verosimiglianza.

14. In una famiglia ci sono n bambini con probabilità pari a αp^n , $n \geq 1$, dove $\alpha \leq (1 - p)/p$.
 (a) Qual è la percentuale delle famiglie che non hanno bambini?
 (b) Se ogni figlio è un bambino o una bambina con uguale probabilità e in maniera indipendente dagli altri figli, qual è la percentuale delle famiglie che hanno k maschi (e un qualsiasi numero di femmine)?

15. Supponiamo di fare n lanci indipendenti di una moneta che ha probabilità pari a p di dare testa. Si mostri che la probabilità di ottenere un numero pari di volte testa vale $\frac{1}{2}[1 + (q - p)^n]$, dove $q = 1 - p$. Per farlo, si provi e quindi si utilizzi la seguente identità

$$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2}[(p + q)^n + (q - p)^n]$$

dove $[n/2]$ è il più grande intero minore o uguale a $n/2$. Si confronti questo esercizio con l'Esercizio teorico 15 del terzo capitolo.

16. Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ . Si provi che $P\{X = i\}$ prima cresce e poi decresce al crescere di i , raggiungendo il suo massimo in corrispondenza del più grande intero minore o uguale a λ .

SUGGERIMENTO: Si consideri $P\{X = i\}/P\{X = i - 1\}$.

17. Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ .

(a) Si provi che

$$P\{X \text{ è pari}\} = \frac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda}]$$

usando il risultato dell'Esercizio teorico 15 e la relazione tra le variabili di Poisson e binomiali.

(b) Si verifichi direttamente la precedente uguaglianza utilizzando lo sviluppo di $e^{-\lambda} + e^\lambda$.

18. Sia X una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ . Che valore di λ massimizza $P\{X = k\}$, $k \geq 0$?

19. Se X è una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ , si mostri che

$$E[X^n] = \lambda E[(X + 1)^{n-1}]$$

Si utilizzi questo risultato per calcolare $E[X^3]$.

20. Consideriamo n monete, ognuna delle quali indipendentemente dalle altre dà testa con probabilità pari a p . Supponiamo che n sia grande e p piccolo e definiamo $\lambda = np$. Supponiamo inoltre che tutte le n monete vengano lanciate; se almeno una moneta dà testa l'esperimento si arresta, altrimenti lanciamo di nuovo le monete fino a che non si ottenga un lancio delle n monete in cui almeno una dia testa. Denotiamo con X il numero totale di teste che otteniamo. Quale dei seguenti ragionamenti relativi all'approssimazione di $P\{X = 1\}$ è corretto? (in tutti i casi Y rappresenta una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ).

(a) Siccome il numero totale di teste che otteniamo quando tutte e n le monete vengono lanciate è approssimativamente dato da una variabile di Poisson di parametro λ , allora

$$P\{X = 1\} \approx P\{Y = 1\} = \lambda e^{-\lambda}$$

(b) Siccome il numero totale di teste che otteniamo quando tutte e n le monete vengono lanciate è approssimativamente dato da una variabile di Poisson di parametro λ e

poiché noi ci arrestiamo solo quando questo numero risulta positivo, allora

$$P\{X = 1\} \approx P\{Y = 1 | Y > 0\} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$$

(c) Siccome almeno una moneta ha dato testa, X sarà uguale a 1 se nessuna delle altre $n - 1$ monete ha dato testa. Poiché il numero di teste risultante da queste $n - 1$ monete è approssimativamente una Poisson di media $(n - 1)p \approx \lambda$,

$$P\{X = 1\} \approx P\{Y = 0\} = e^{-\lambda}$$

21. Preso un insieme di n persone scelte a caso, denotiamo con E_{ij} l'evento che le persone i e j festeggino il compleanno il medesimo giorno. Si supponga che ogni persona abbia il proprio compleanno in uno qualsiasi dei 365 giorni dell'anno. Si trovi.

- (a) $P(E_{3,4} | E_{1,2})$;
- (b) $P(E_{1,3} | E_{1,2})$;
- (c) $P(E_{2,3} | E_{1,2} \cap E_{1,3})$.

22. Un'urna contiene $2n$ palline, delle quali 2 sono numerate con l'1, 2 con il 2, ..., e 2 con l' n . Le estraiamo in successione a blocchi di 2 senza reinserimento. Denotiamo con T la prima estrazione nella quale le due palline estratte in blocco abbiano lo stesso numero (e poniamo T uguale a infinito se nessuna coppia è formata da palline con lo stesso numero). Per $0 < \alpha < 1$ vogliamo provare che

$$\lim_n P\{T > \alpha n\} = e^{-\alpha/2}$$

Per farlo, denotiamo con M_k il numero di coppie di palline con lo stesso numero estratte nelle prime k estrazioni, con $k = 1, \dots, n$.

- (a) Si deduca che, quando n è grande, M_k può essere considerato come il numero (approssimato) di successi in k prove indipendenti.
- (b) Quando n è grande, si approssimi $P\{M_k = 0\}$.
- (c) Si rappresenti l'evento $\{T > \alpha n\}$ in funzione del valore di una delle variabili M_k .
- (d) Si passi al limite $P\{T > \alpha n\}$.

23. Consideriamo un gruppo casuale di n individui. Calcolando l'approssimazione della probabilità che non ci siano terne di essi che abbiano il medesimo compleanno, una migliore approssimazione di Poisson rispetto a quella ottenuta nel testo (per lo meno per valori compresi tra 80 e 90) si ottiene definendo con E_i gli eventi che ci siano almeno 3 compleanni nel giorno i , $i = 1, \dots, 365$.

- (a) Si trovi $P(E_i)$.
- (b) Si dia un'approssimazione per la probabilità che non ci siano tre individui con il medesimo compleanno.
- (c) Valutare la precedente approssimazione per $n = 88$ (che si può provare essere il più piccolo valore di n per il quale la probabilità supera 0.5).

24. Questo è un ulteriore procedimento per trovare delle equazioni ricorsive per determinare P_n , la probabilità che ci sia una successione di k teste in n lanci di una moneta che dia testa con probabilità pari a p .

- (a) Ricavare che, per $k < n$, esiste una sequenza di k teste consecutive se
 1. c'è una sequenza di k teste consecutive nei primi $n - 1$ lanci; oppure
 2. non ci sono sequenza di k teste consecutive nei primi $n - k - 1$ lanci, il lancio $n - k$ dà testa e i lanci $n - k + 1, \dots, n$ sono tutte teste.
- (b) Usando quanto fatto al punto (a), mettere in relazione P_n con P_{n-1} . Partendo con $P_k = p^k$, la ricorsione può essere usata per ottenere P_{k+1} e così via fino a ricavare P_n .

25. Si supponga che il numero di eventi che si verificano in uno specifico intervallo di tempo sia dato da una variabile aleatoria di Poisson di parametro λ . Se ogni evento viene contato con probabilità p , in maniera indipendente dagli altri eventi, si provi che il numero di

eventi che vengono contati si distribuisce come una variabile aleatoria di Poisson di parametro λp . Si dia anche un argomento intuitivo di perché questo debba essere il risultato.

Come applicazione, si supponga che il numero di giacimenti di uranio di una data regione sia una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\lambda = 10$. Se in un prefissato periodo di tempo ognuno dei giacimenti può essere scoperto in maniera indipendente dagli altri con probabilità pari a $\frac{1}{50}$, si trovi la probabilità che

- (a) esattamente uno;
 (b) almeno 1;
 (c) al più un giacimento venga scoperto?

26. Si provi che

$$\sum_{i=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

SUGGERIMENTO: Si usi la formula di integrazione per parti.

27. Se X è una variabile aleatoria geometrica, si provi analiticamente che

$$P\{X = n + k | X > n\} = P\{X = k\}$$

Utilizzando l'interpretazione probabilistica della legge geometrica, si ragioni sul perché la precedente formula debba valere.

28. Sia X una variabile aleatoria binomiale negativa di parametri r e p , e sia Y una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p . Si dimostri che

$$P\{X > n\} = P\{Y < r\}$$

SUGGERIMENTO: Si può procedere in maniera analitica provando l'identità

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

oppure si può procedere in maniera probabilistica utilizzando l'interpretazione che abbiamo dato di queste variabili. Cioè, considerando una successione di prove indipendenti aventi una comune probabilità pari a p di successo, si esprima l'evento $\{X > n\}$ e l'evento $\{Y < r\}$ in termini degli esiti di questa successione di prove.

29. Data una legge ipergeometrica, si determini

$$P\{X = k + 1\} / P\{X = k\}$$

30. In un'urna ci sono palline numerate dall'1 all' N . Supponiamo che n di esse, con $n \leq N$, vengano estratte a caso senza reinserimento. Denotiamo con Y il numero maggiore tra quelle delle palline estratte.

- (a) Trovare la densità discreta di Y .
 (b) Derivare una espressione per $E[Y]$ e quindi usare l'identità combinatoria di Fermat (si veda l'Esercizio teorico 11 del primo capitolo per semplificarla.)

31. Un barattolo contiene $m + n$ monete, numerate $1, 2, \dots, n + m$. Estraiamo un campione di n monete. Se denotiamo con X il numero delle monete estratte che hanno un numero maggiore di tutte quelle ancora rimaste nel barattolo, se ne calcoli la densità discreta.

32. Un barattolo contiene n monete. Supponiamo che un ragazzo faccia una successione di estrazioni dal barattolo, ogni volta rimettendo nella scatola la moneta estratta prima di procedere alla successiva estrazione. Questo continua finché il ragazzo non pesca una moneta per due volte. Denotiamo con X il numero di estrazioni fatte dal ragazzo: se ne calcoli la densità discreta.

33. Si risolva il precedente esercizio assumendo questa volta che non venga reinserita la moneta estratta prima della successiva estrazione.

34. Da una insieme formato da n elementi scegliamo a caso un sottoinsieme non vuoto nel senso che ogni sottoinsieme non vuoto potrà essere selezionato con uguale probabilità. Denotiamo con X il numero di elementi presenti nel sottoinsieme selezionato. Usando le identità date nell'Esercizio teorico 12 del primo capitolo, si provi

$$E[X] = \frac{n}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{n \cdot 2^{2n-2} - n(n+1)2^{n-2}}{(2^n - 1)^2}$$

Si provi inoltre che per n grande,

$$\text{Var}(X) \sim \frac{n}{4}$$

Si confronti questo con il limite di $\text{Var}(Y)$ quando $P\{Y = i\} = 1/n, i = 1, \dots, n$.

35. Un'urna inizialmente contenga una pallina rossa e una blu. A ogni passo estraiamo una pallina dall'urna e la reinseriamo nell'urna unitamente a un'altra del medesimo colore. Denotiamo con X il numero dell'estrazione alla quale per la prima volta appare una pallina blu. Per esempio, se la prima pallina estratta è rossa e la seconda è blu, allora X è uguale a 2.

(a) Trovare $P\{X > i\}, i \geq 1$.

(b) Si provi che con probabilità 1, una pallina blu verrà prima o poi estratta. (Cioè si dimostri che $P\{X < \infty\} = 1$.)

(c) Trovare $E[X]$.

36. Supponiamo che la variabile aleatoria X possa assumere i valori $\{x_i\}$, la variabile Y i valori $\{y_j\}$ e la variabile $Z = X + Y$ i valori $\{z_k\}$. Denotiamo con A_k l'insieme di tutte le coppie di indici (i, j) tali che $x_i + y_j = z_k$: cioè $A_k = \{(i, j) : x_i + y_j = z_k\}$.

(a) Si provi che

$$P\{X + Y = z_k\} = \sum_{(i, j) \in A_k} P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

(b) Si mostri che

$$E[X + Y] = \sum_k \sum_{(i, j) \in A_k} (x_i + y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

(c) Utilizzando la precedente formula, si provi che

$$E[X + Y] = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

(d) Si mostri che

$$P(X = x_i) = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

$$P(Y = y_j) = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

(e) Si provi che

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

ESERCIZI DI AUTOVALUTAZIONE

- Supponiamo che la variabile aleatoria X sia uguale al numero di rigori segnati da un certo giocatore nei prossimi 3 turni di rigori. Se $P\{X = 1\} = 0.3$, $P\{X = 2\} = 0.2$ e $P\{X = 0\} = 3P\{X = 3\}$, si trovi $E[X]$.
- Supponiamo che X prenda uno dei valori 0, 1, 2. Se per qualche costante c , $P\{X = i\} = cP\{X = i - 1\}$, $i = 1, 2$, si trovi $E[X]$.
- Una moneta che quando viene lanciata dà testa con probabilità pari a p , viene lanciata fino a che si ottenga per la seconda volta testa o croce. Si trovi il numero atteso dei lanci che si dovranno fare.
- Una certa comunità è composta da m famiglie, n_i delle quali hanno i bambini, $\sum_{i=1}^r n_i = m$. Se scegliamo a caso una famiglia, denotiamo con X il numero di bambini di quella famiglia. Se uno dei $\sum_{i=1}^r in_i$ bambini è scelto a caso, denotiamo con Y il numero totale di bambini presenti nella sua famiglia. Si provi che $E[Y] \geq E[X]$.
- Supponiamo che $P\{X = 0\} = 1 - P\{X = 1\}$. Se $E[X] = 3\text{Var}(X)$, trovare $P\{X = 0\}$.
- In un barattolo ci sono due monete. Quando una di queste viene lanciata dà testa con probabilità pari a 0.6, mentre l'altra dà testa con probabilità pari a 0.3. Viene scelta a caso una delle due monete e quindi viene lanciata. Prima della scelta della moneta, potete scommettere fino a 10 euro e se viene testa vincete quanto avete scommesso, mentre lo perdetevi se viene croce. Supponiamo, tuttavia, che qualcuno vi voglia vendere, al prezzo di C euro, l'informazione riguardo a quale moneta è stata scelta. Qual è il vostro guadagno atteso se voi comprate l'informazione? Si noti che se comprate l'informazione e quindi scommettete x , allora voi finirete guadagnando $x - C$ o $-x - C$ (cioè, perdendo $x + C$ nell'ultimo caso). Inoltre, per quale valore di C conviene comprare l'informazione?
- Un filantropo scrive un numero positivo x su un foglio rosso, lo mostra a un osservatore imparziale, e quindi lo mette a faccia ingiù sul tavolo. L'osservatore allora lancia una moneta equilibrata. Se ottiene testa, scrive il valore $2x$, e, se ottiene croce, il valore $x/2$ su un pezzo di carta blu che mette a faccia ingiù sul tavolo. Senza sapere il valore iniziale x né l'esito del lancio della moneta, avete l'opportunità di girare o il foglio rosso o quello blu. Dopo averlo fatto e aver osservato il numero scritto sulla carta, potete scegliere se ricevere in premio quella quantità di euro o quella, non nota, determinata dal numero scritto sul foglio che non avete voltato. Per esempio, se scegliete di girare il foglio blu e osservate il valore 100, allora potete scegliere se accettare 100 euro o prendere il valore (di 200 o 50 euro) segnato sul foglio rosso. Supponiamo che voi desideriate che il vostro guadagno atteso sia il maggiore possibile.
 - Giustificate perché non ha senso che voi giriate il foglio rosso per primo, perché così facendo qualsiasi sarà il valore che vedrete, sarà sempre più conveniente cambiarlo per il foglio blu.
 - Sia y un valore non negativo fissato e considerate la seguente strategia. Girate il foglio blu e se il valore è almeno y , allora accettate quella cifra. Se è minore di y , allora cambiate e girate il foglio rosso. Sia $R_y(x)$ il guadagno ottenuto se il filantropo ha scritto sul foglio la cifra x e voi utilizzate questa strategia. Si determini $E[R_y(x)]$. Si noti che $E[R_0(x)]$ è il guadagno atteso se il filantropo scrive la cifra x quando voi usate la strategia di scegliere sempre il foglio blu.
- Sia $B(n, p)$ una variabile aleatoria binomiale di parametri n e p . Provate che

$$P\{B(n, p) \leq i\} = 1 - P\{B(n, 1 - p) \leq n - i - 1\}$$

SUGGERIMENTO: Il numero di successi minori o uguali a i è equivalente a quanto richiesto per gli insuccessi?

- Se X è una variabile aleatoria binomiale di valore atteso pari a 6 e varianza pari a 2.4, si determini $P\{X \geq 5\}$.
- Un'urna contiene n palline, numerate da 1 a n . Se m palline sono estratte a caso in successione con reinserimento, si trovi $P\{X = k\}$, $k = 1, \dots, m$, dove X rappresenta il massimo degli m numeri scelti.

SUGGERIMENTO: Si incominci determinando $P\{X \leq k\}$.
- Due squadre, A e B , giocano una serie di partite e la prima che totalizza 3 vittorie è dichiarata vincitrice della sfida. Supponiamo che la squadra A vinca ogni partita in maniera indipendente dalle altre con probabilità pari a p . Si trovi la probabilità condizionata che A vinca
 - la sfida sapendo che ha vinto la prima partita;
 - la prima partita, sapendo che ha vinto la sfida.
- Una squadra di calcio deve giocare ancora 5 partite. Se vincerà questo fine settimana, allora giocherà le ultime 4 partite contro le prime quattro classificate di un altro girone, altrimenti le giocherà contro le ultime quattro squadre classificate di quel girone. Nel primo caso avrà probabilità pari a 0.3 di vincere, in maniera indipendente, ogni singola partita, mentre nel secondo caso la probabilità sarà di 0.7. Se la probabilità di vincere la partita del prossimo fine settimana è pari a 0.5, qual è la probabilità che vinca almeno 3 delle 4 partite finali?
- Ognuno dei 7 giudici di una corte prenderà la decisione corretta in maniera indipendente dagli altri con probabilità pari a 0.7. Se la decisione della giuria è presa a maggioranza, qual è la probabilità che la giuria prenda la decisione corretta? Dato che 4 giudici concordano tra loro, quanto vale la probabilità che la giuria prenda la decisione corretta?
- Una media di 5.2 uragani colpiscono ogni anno una certa regione. Qual è la probabilità che ci siano al più 3 uragani quest'anno?
- Il numero di uova deposte da un particolare insetto su una foglia è dato da una variabile di Poisson di parametro λ . Tuttavia, questa variabile può essere solo osservata se è positiva, poiché se vale 0 non possiamo sapere se fosse effettivamente presente su quella foglia l'insetto studiato. Se denotiamo con Y il numero osservato di uova, allora

$$P\{Y = i\} = P\{X = i | X > 0\}$$

dove X è una variabile di Poisson di parametro λ . Si trovi $E[Y]$.

- Un gruppo di n ragazzi e n ragazze scelgono in maniera casuale e indipendente un membro dell'altro sesso. Se un ragazzo e una ragazza si scelgono l'un l'altro, allora divengono una coppia. Enumerate le ragazze, si definisca con G_i l'evento che la ragazza numero i fa parte di una coppia. Sia $P_0 = 1 - P(\bigcup_{i=1}^n G_i)$ la probabilità che non si sia formata alcuna coppia.
 - Quanto vale $P(G_i)$?
 - Quanto vale $P(G_i | G_j)$?
 - Per n grande, approssimare P_0 .
 - Per n grande, approssimare P_k , la probabilità che si siano formate esattamente k coppie.
 - Usare il principio di inclusione/esclusione per calcolare P_0 .
- Un totale di $2n$ persone, formate da n coppie sposate, viene diviso in maniera casuale in n coppie. Numerate le donne, sia W_i l'evento che la donna i venga accoppiata al proprio marito.
 - Trovare $P(W_i)$.
 - Per $i \neq j$, trovare $P(W_i | W_j)$.

- (c) Si approssimi, per n grande, la probabilità che nessuna moglie sia accoppiata al proprio marito.
 (d) Se ogni coppia è formata da un uomo e una donna, a che cosa si riduce il problema?
18. Un cliente di un casinò continua a scommettere 5 euro sul rosso alla roulette finché non vince 4 scommesse.
- (a) Qual è la probabilità che giochi in totale 9 volte?
 (b) Qual è la vincita attesa quando si ferma?

OSSERVAZIONE: A ogni scommessa vincerà 5 euro con probabilità pari a $\frac{18}{38}$ o perderà 5 euro con probabilità $\frac{20}{38}$.

19. Quando tre amici vanno a prendere il caffè assieme, decidono chi pagherà lanciando ognuno una moneta e facendo pagare chi ottiene una faccia differente dagli altri due. Se tutti e tre ottengono la stessa faccia, (cosicché non ci sarà nessuno in quella situazione), fanno un secondo lancio e così via fino alla prima volta che non tutte le monete saranno uguali. Qual è la probabilità che
- (a) vengono lanciate le monete esattamente 3 volte;
 (b) siano necessari più di 4 lanci?
20. Se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro p , si provi che

$$E[1/X] = \frac{-p \log(p)}{1-p}$$

SUGGERIMENTO: Dovete calcolare una espressione della forma $\sum_{i=1}^{\infty} a^i/i$. Per farlo, scrivete $a^i/i = \int_0^a x^{i-1} dx$, e quindi scambiate tra loro la somma con l'integrale.

21. Supponiamo che

$$P\{X = a\} = p, \quad P\{X = b\} = 1 - p$$

- (a) Si provi che $\frac{X-b}{a-b}$ è una variabile aleatoria binomiale.
 (b) Si trovi $\text{Var}(X)$.
22. Giocate una serie di partite e avete probabilità pari a p di vincerne ognuna. Avete programmato di giocare 5, ma se vincete la quinta, continuate a giocare fino alla prima sconfitta.
- (a) Si trovi il numero atteso di partite che giocherete.
 (b) Si trovi il numero atteso di partite che perderete.
23. Estraete una pallina alla volta senza reinserimento da un'urna che contiene N palline bianche e M palline nere. Si trovi la probabilità che n palline bianche vengano estratte prima che m palline nere siano estratte, dove $n \leq N, m \leq M$.
24. Dobbiamo distribuire 10 palline in 5 scatole, essendo la probabilità che ogni pallina finisca nella scatola i pari a $p_i, \sum_{i=1}^5 p_i = 1$. Sia X_i il numero (aleatorio) di palline che alla fine saranno nella scatola i . Si assuma che gli eventi che si riferiscono alla posizione di differenti palline siano tra loro indipendenti.
- (a) Che tipo di distribuzione ha la variabile X_i ? Si sia il più precisi possibile.
 (b) Per $i \neq j$ che tipo di distribuzione ha la variabile $X_i + X_j$?
 (c) Si calcoli $P\{X_1 + X_2 + X_3 = 7\}$.
25. Per il problema degli accoppiamenti (Esempio 5m del Capitolo 2), si determini:
- (a) Il numero atteso di accoppiamenti.
 (b) La varianza del numero di accoppiamenti.
26. Sia α la probabilità che una variabile aleatoria geometrica X di parametro p sia un numero pari.

(a) Si determini α utilizzando l'identità $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X = 2i\}$.

(b) Si determini α condizionando a che $X = 1$ oppure $X > 1$.

27. Le finali NBA sono al meglio di 7 partite, significando questo che la squadra che per prima vince 4 partite diventa campione. Nella sua storia, nessuna squadra ha mai vinto la "serie" finale dopo essere stata in svantaggio per 3 a 1. Supponendo che ogni partita giocata nella serie possa essere vinta con uguale probabilità da ognuna delle due finaliste, in maniera indipendente dalle precedenti partite, qual è la probabilità che una squadra in svantaggio 3 a 1 riesca a vincere la finale?
28. Una scatola contiene n palline bianche e m palline nere. Estraiamo a caso le palline, senza reinserimento, finché un totale di $k, k \leq n$, palline bianche venga estratto. La variabile aleatoria X che denota il numero totale di palline che dobbiamo estrarre per ottenerne k bianche viene definita *ipergeometrica negativa*.
- (a) Si spieghi come questa distribuzione differisca da quella binomiale negativa.
 (b) Si calcoli $P\{X = r\}$.

SUGGERIMENTO PER (B): Affinché $X = r$ si verifichi, quale deve essere il risultato delle prime $r - 1$ estrazioni?