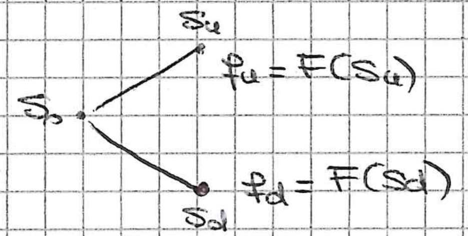
Albero binomiale ad uno stadio

S_0 prezzo dell'azione oggi

S_T " " al tempo T

$$S_T = \begin{cases} S_u = u S_0 & \text{rialzo} \quad u > 1 \\ S_d = d S_0 & \text{ribasso} \quad 0 < d < 1 \end{cases}$$

Derivato di payoff finale $F(S_T) = \begin{cases} F(S_u) = f_u \\ F(S_d) = f_d \end{cases}$



Vogliamo determinare il prezzo del derivato oggi f_0.

Costruiamo un portafoglio (Δ, R) Δ = quota in azioni, R = denaro in prestito

Valore del portafoglio oggi $V_0 = \Delta S_0 - R$

e imponiamo che il valore del portafoglio al tempo T sia pari al valore del derivato (condizione di replica): $V_T = \Delta S_T - R e^{rT} = F(S_T)$

In ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio avremo che $f_0 = V_0$.

La condizione di replica

$V_T = \Delta S_T - R e^{rT} = F(S_T)$ dà luogo ad un sistema lineare

$$\begin{cases} \Delta S_u - R e^{rT} = f_u & \text{in caso di rialzo} \\ \Delta S_d - R e^{rT} = f_d & \text{in caso di ribasso} \end{cases}$$

Sottraendo dalla 1° eq. la 2° eq.

$$\Delta (S_u - S_d) = f_u - f_d \implies \begin{cases} \Delta = \dfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d} & \text{Delta} \\ B = (\Delta S_u - f_u) e^{-rT} \end{cases}$$

Calcoliamo $f_0 = V_0 = \Delta S_0 - B$

$$f_0 = \Delta S_0 - B = \Delta S_0 - (\Delta S_u - f_u) e^{-rT} = \Delta (S_0 - S_u e^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{f_u - f_d}{S_0 (u-d)} \quad \text{andiamo a sostituire}$$

$$f_0 = \frac{f_u - f_d}{\cancel{S_0} (u-d)} \left(\cancel{S_0}^{1} - u \cancel{S_0} e^{-rT} \right) + f_u e^{-rT} = e^{-rT} \left\{ \frac{f_u - f_d}{u-d} \left(e^{rT} - u \right) + f_u \right\} =$$

$$= e^{-rT} \left\{ f_u \Big(\underbrace{\frac{e^{rT} - u}{u-d} + 1}_{\frac{e^{rT} - u + u - d}{u-d}} \Big) + f_d \left(\frac{u - e^{rT}}{u-d} \right) \right\} \qquad p = \frac{e^{rT} - d}{u-d}$$

$$1 - p = \frac{u - e^{rT}}{u-d}$$

$$\implies \boxed{f_0 = e^{-rT} \{ f_u \cdot p + f_d (1-p) \}}$$

Una volta verificato che $0 < p = \dfrac{e^{rT} - d}{u-d} < 1$ $\qquad f_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{Q} [F(S_T)]$

con Q misura di probabilità t.c. $\quad Q(S_T = S_u) = p \quad$ e $\quad Q(S_T = S_d) = 1 - p$

La formula $\boxed{f_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)]}$ è detta valutazione neutrale al rischio in quanto il valore atteso è calcolato rispetto alla misura Q neutrale al rischio.

Def. Una misura Q è neutrale al rischio se il rendimento atteso dell'azione rispetto a Q coincide con il tasso d'interesse privo di rischio r.

Calcoliamo $\mathbb{E}^{Q}[S_T] = S_u \cdot p + S_d \cdot (1-p) = S_0 e^{rT}$

$$S_0 (up + d(1-p)) = S_0 e^{rT} \qquad up + d(1-p) = e^{rT}$$

$$(u-d)p = e^{rT} - d \quad \Rightarrow \quad p = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$$

ritroviamo l'espressione della pagina precedente.

Proposizione

Il mercato è libero da arbitraggi $\iff 0 < p < 1 \iff d < e^{rT} < u$

Dim. Mostriamo solo che AOA $\Rightarrow d < e^{rT} < u$

Se fosse $d \geq e^{rT}$ $\quad S_d = S_0 d \geq S_0 e^{rT}$ si apre la seguente opportunità d'arbitraggio:

acquistiamo l'azione oggi e la rivendiamo al tempo T:

S_0 denaro in prestito al tasso $r \rightarrow$ restituire $S_0 e^{rT}$ al tempo T

al tempo T: $\quad S_T - S_0 e^{rT} = \begin{cases} S_d - S_0 e^{rT} \geq 0 & \text{in caso di ribasso} \\ S_u - S_0 e^{rT} > 0 & \text{in caso di rialzo} \end{cases}$

Se fosse $e^{rT} \geq u$ $\quad S_0 e^{rT} \geq S_0 u = S_u$ si apre la seguente opportunità di arbitraggio:

vendiamo l'azione allo scoperto incassiamo S_0 e investiamo al tasso r

acquistiamo l'azione al tempo T e chiudiamo la posizione allo scoperto.

al tempo T:

$$S_0 e^{rT} - S_T = \begin{cases} S_0 e^{rT} - S_u \geq 0 & \text{in caso di rialzo} \\ S_0 e^{rT} - S_d > 0 & \text{in caso di ribasso} \end{cases}$$

Osservazione:

Nella valutazione il rendimento atteso dell'azione nel mondo reale non interviene ma si usa solo il tasso d'interesse privo di rischio.

Se μ è il rendimento atteso nel mondo reale $\quad \mathbb{E}[S_T] = S_0 e^{\mu T}$

essendo $\quad \mathbb{E}[S_T] = S_u \underbrace{P(S_T = S_u)}_{q} + S_d \underbrace{P(S_T = S_d)}_{1-q} = S_0 e^{\mu T}$

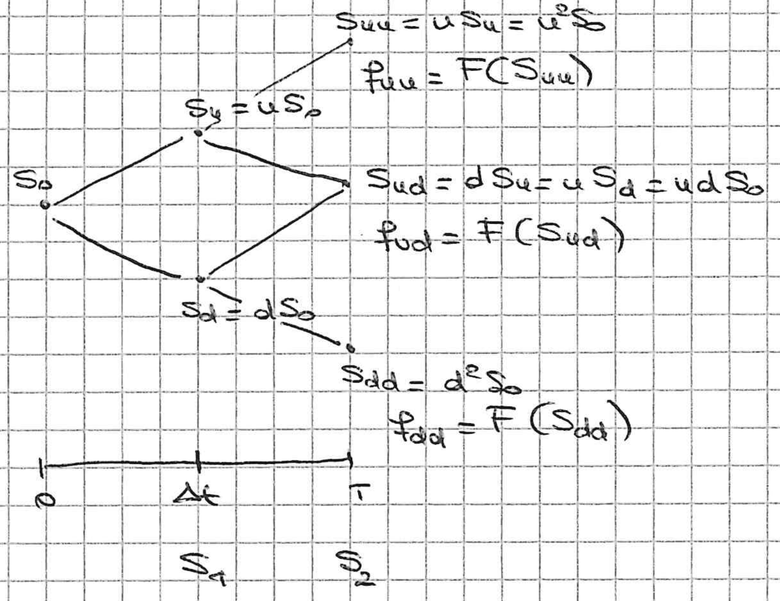
Se q è la probabilità di rialzo nel mondo reale abbiamo che

$$S_0(u q + d(1-q)) = S_0 e^{\mu T} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{e^{\mu T} - d}{u - d}$$

rendimento atteso nel mondo reale

probabilità mondo reale

Albero binomiale a 2 stadi



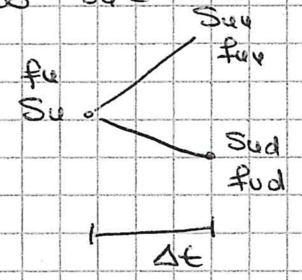
$u > 1 \qquad 0 < d < 1$

T scadenza del derivato

$\Delta t = \frac{T}{2}$

Payoff finale del derivato $F(S_T)$

Con considerazioni analoghe al caso di albero ad 1 stadio, se ci focalizziamo sul sotto-albero



$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

possiamo ricavare la formula:

$$\boxed{f_u = e^{-r\Delta t}\{ f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\}}$$

e analogamente

$$\boxed{f_d = e^{-r\Delta t}\{ f_{ud}\, p + f_{dd}(1-p)\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_0 = e^{-r\Delta t}\{ f_u\, p + f_d (1-p)\}}$$

Procedura a ritroso sull'albero

Sostituendo le espressioni di f_u e f_d in quella di f_0 si ottiene

$$f_0 = e^{-r\Delta t}\{ e^{-r\Delta t}[f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)]\, p + e^{-r\Delta t}[f_{ud}\, p + f_{dd}(1-p)](1-p)\} =$$

$$= \underbrace{e^{-2r\Delta t}}_{e^{-rT}}\{ f_{uu}\, p^2 + 2 f_{ud}\, p(1-p) + f_{dd}(1-p)^2\} = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{Q}[F(S_T)]$$

Ritroviamo la formula di valutazione neutrale al rischio

Se indichiamo con $\mathbb{Q}$ quella misura di probabilità t.c.

$\frac{S_1}{S_0}$ e $\frac{S_2}{S_1}$ sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite

$$\frac{S_1}{S_0} = \begin{cases} u & \text{con prob. } p \\ d & \text{"} \quad 1-p \end{cases} \qquad \frac{S_2}{S_1} = \begin{cases} u & p \\ d & 1-p \end{cases}$$

$S_1 = S_{\Delta t}$ prezzo del titolo nel 1° periodo

$S_2 = S_T$. prezzo del titolo nel 2° periodo

Osserviamo che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1}{S_0}\right] = up + d(1-p) = e^{r\Delta t}$

$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2}{S_1}\right] = up + d(1-p) = e^{r\Delta t}$

da cui segue che $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_2] = S_{uu}\, p^2 + 2\, S_{ud}\, p(1-p) + S_{dd}(1-p)^2 =$

$$= S_0 \{ u^2p^2 + 2ud\, p(1-p) + d^2(1-p)^2 \} =$$

$$= S_0 \left(up + d(1-p)\right)^2 = S_0 \left(e^{r\Delta t}\right)^2 = S_0 e^{rT}$$

Ritroviamo che rispetto a $\mathbb{Q}$ il rendimento atteso dell'azione sull'intervallo $[0,T]$ coincide con il tasso d'interesse privo di rischio. Per questo motivo $\mathbb{Q}$ è chiamata misura neutrale al rischio.

Questo risultato si può anche ottenere anche tenendo conto che se X e Y sono v.a. indipendenti $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$. Infatti

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_2] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_0} \cdot S_0\right] = S_0\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2}{S_1}\right]}_{e^{r\Delta t}}\, \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1}{S_0}\right]}_{e^{r\Delta t}} = S_0 e^{r2\Delta t} = S_0 e^{rT}$$

Osserviamo che

$$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\,p + f_{ud}(1-p)\} = e^{-r\Delta t}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T) \mid S_1 = S_u]$$
$$f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}\,p + f_{dd}(1-p)\} = e^{-r\Delta t}\,\mathbb{E}^{Q}[F(S_T) \mid S_1 = S_d]$$

Media condizionate

infatti $Q(S_T = S_{uu} \mid S_1 = S_u) = p$ e $Q(S_T = S_{ud} \mid S_1 = S_u) = 1-p$

$Q(S_T = S_{du} \mid S_1 = S_d) = p$ e $Q(S_T = S_{dd} \mid S_1 = S_d) = 1-p$

Determinazione della strategia di copertura

Consideriamo strategie dinamiche $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1)\}$

Δ_i = quote in azioni al tempo $t_i = i\Delta t$ $\quad i=0,1$

B_i = denaro in prestito nel portafoglio al tempo $t_i = i\Delta t$ $\quad i=0,1$

La coppia (Δ_1, B_1) è costituita da v.a. che dipendono dal prezzo S_1:

$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{1,u} & \text{se } S_1 = S_u \\ \Delta_{1,d} & \text{se } S_1 = S_d \end{cases} \qquad B_1 = \begin{cases} B_{1,u} & \text{se } S_1 = S_u \\ B_{1,d} & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

Vogliamo determinare $\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1)\}$ in modo tale che il suo valore finale sia pari al payoff finale del derivato e che sia autofinanziante, ossia che possa cambiare al tempo Δt ma senza un intervento esterno, ossia senza l'aggiunta di liquidità

Condizione di replica:

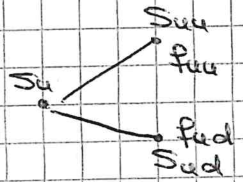
$$\boxed{\underbrace{\Delta_1 S_2 - R_1 e^{r\Delta t}}_{\text{valore al tempo } T \text{ del portafoglio}} = \underbrace{F(S_2)}_{\text{payoff del derivato}}} \qquad (R)$$

Condizione di autofinanziamento:

$$\boxed{\underbrace{\Delta_0 S_1 - R_0 e^{r\Delta t}}_{\text{valore al tempo } \Delta t \text{ della strategia } (\Delta_0, R_0)} = \underbrace{\Delta_1 S_1 - R_1}_{\text{valore al tempo } \Delta t \text{ della strategia } (\Delta_1, R_1)}} \qquad (AUT)$$

Imponiamo la condizione di replica (R):

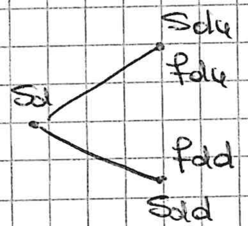
Se $S_1 = S_u$



$$\begin{cases} \Delta_{1,u} S_{uu} - R_{1,u} e^{r\Delta t} = F(S_{uu}) = f_{uu} \\ \Delta_{1,u} S_{ud} - R_{1,d} e^{r\Delta t} = F(S_{ud}) = f_{ud} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Delta_{1,u} = \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}} \\ R_{1,u} = e^{-r\Delta t} \{ \Delta_{1,u} S_{uu} - f_{uu} \} \end{cases}$$

Se $S_1 = S_d$

$$\begin{cases} \Delta_{1,d} S_{du} - R_{1,d} e^{r\Delta t} = f_{ud} \\ \Delta_{1,d} S_{dd} - R_{1,d} e^{r\Delta t} = f_{dd} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Delta_{1,d} = \dfrac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}}} \\ R_{1,d} = e^{-r\Delta t} \{ \Delta_{1,d} S_{du} - f_{ud} \} \end{cases}$$



Poiché il valore di (Δ_1, R_1) al tempo T è pari al valore del derivato in assenza di opportunità di arbitraggio i valori dei due portafogli devono essere uguali al tempo Δt:

$$\boxed{\Delta_1 S_1 - R_1 = V_1(S_1)} \leftarrow \text{valore del derivato al tempo } \Delta t$$

Sostituendo nella condizione di autofinanziamento otteniamo che:

$$\underbrace{\boxed{\Delta_0 S_1 - R_0 e^{r\Delta t}}}_{\text{valore al tempo } \Delta t \text{ della strategia } (\Delta_0, S_0)} = \underbrace{\boxed{V_1(S_1)}}_{\text{valore al tempo } \Delta t \text{ del derivato}}$$

AOA $\Rightarrow$ $\Delta_0 S_0 - R_0 = f_0$ i due portafogli devono avere lo stesso valore anche al tempo $t=0$

Determiniamo (Δ_0, R_0):

se $S_1 = S_u$ $\quad \Delta_0 S_u - R_0 e^{r\Delta t} = f_u$

se $S_1 = S_d$ $\quad \Delta_0 S_d - R_0 e^{r\Delta t} = f_d$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{\Delta_0 = \dfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d}} \\ R_0 = e^{-r\Delta t}\{\Delta_0 S_u - f_u\} \end{cases}$$

abbiamo così costruito un portafoglio dinamico in azioni autofinanziante che replica il derivato. La quota in azioni è il delta del portafoglio ed è pari a

$$\Delta_0 = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \qquad \Delta_1 = \begin{cases} \dfrac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}} & \text{se } S_1 = S_u \\ \dfrac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}} & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

Infine osserviamo che analogamente ai conti fatti per l'albero binomiale ad 1 stadio ricaviamo che $\quad f_0 = e^{r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\}$ $\quad p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$

Tenendo conto che $\Delta_1 S_1 - B_1 = V_1(S_1)$ abbiamo che

$\Delta_{1,u} S_u - B_{1,u} = f_u \Rightarrow$ sostituendo i valori di $\Delta_{1,u}$ e $B_{1,u}$ $\Rightarrow f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}\, p + f_{ud}(1-p)\}$

$\Delta_{1,d} S_d - B_{1,d} = f_d \Rightarrow$ sostituendo i valori di $\Delta_{1,d}$ e $B_{1,d}$ $\Rightarrow f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{du}\, p + f_{dd}(1-p)\}$

abbiamo così ritrovato le stesse formule scritte procedendo a ritroso sull'albero.

OSSERVAZIONE:

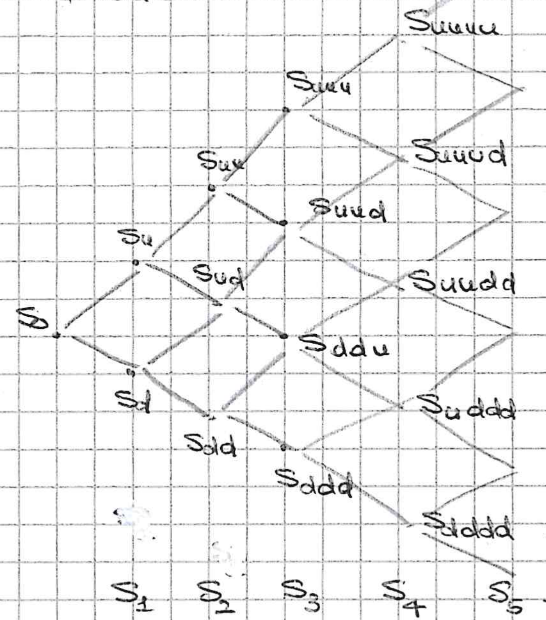
Il portafoglio costituito da una posizione corta nel derivato (vendiamo il derivato) e lunga con Δ_t azioni (con $\Delta_t = \{ \underset{t=0}{\Delta_0}, \underset{t=\Delta t}{\Delta_1} \}$) risulta essere un portafoglio privo di rischio.

In modo analogo possiamo dire che il portafoglio di copertura costituito da Δ_t azioni elimina completamente il rischio dovuto alla posizione corta del derivato.

Alberi binomiali ad m-stadi

Derivato di payoff finale $F(S_T)$, l'intervallo $[0,T]$ viene suddiviso in n periodi lunghi $\Delta t = \frac{T}{n}$

Indichiamo con $S_i = S_{i\Delta t}$ il prezzo del titolo alla fine del periodo i-esimo



ossia al tempo $i\Delta t$ $\quad i=0, \dots, n$

$S_0, S_1, \dots, S_n = S_T$

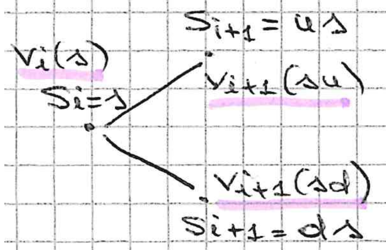
$$\frac{S_i}{S_{i-1}} = \begin{cases} u > 1 & \text{rialzo} \\ d \quad 0<d<1 & \text{ribasso} \end{cases}$$

$\frac{S_i}{S_{i-1}}$ $\quad i = 1, \dots, n$ $\quad$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite

Procedura a ritroso sull'albero: è noto il valore del derivato alle scadenze $F(S_n)$ e condizionandosi al valore di S_{n-1} si ricava il valore del derivato in ogni nodo dell'albero al tempo $(n-1)\Delta t$ e poi si procede fino a determinare il valore del derivato oggi, f_0. In formule:

se $S_i = s$

$$\boxed{\begin{array}{l} V_i(s) = e^{-r\Delta t}\{V_{i+1}(su)\,p + V_{i+1}(sd)(1-p)\} \quad i=0, \dots, n-1 \\ \text{valore del derivato al tempo } i\Delta t \text{ se } S_i = s \qquad \text{ove } V_n(s) = F(s) \end{array}}$$



$$V_i(s) = e^{-r\Delta t}\,\mathbb{E}^{Q}[V_{i+1}(S_{i+1}) \mid S_i = s]$$

in quanto $Q(S_{i+1} = su \mid S_i = s) = p \quad Q(S_{i+1} = sd \mid S_i = s) = 1-p$

per $i=0$ $\quad f_0 = V_0(S_0) = e^{-r\Delta t}\{ f_u\, p + f_d (1-p)\}$ valore del derivato oggi

$$V_1(S_1) = \begin{cases} f_u & \text{se } S_1 = S_u \\ f_d & \text{se } S_1 = S_d \end{cases}$$

Q è la misura neutrale al rischio : $\quad Q\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} = u\right) = p \quad Q\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} = d\right) = 1-p$

$$\boxed{p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}}$$

ossia è t.c. $\quad \mathbb{E}^Q\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right] = e^{r\Delta t}$ $\quad$ il rendimento atteso dell'azione coincide con il tasso d'interesse privo di rischio su ciascun intervallo di lunghezza Δt

$$\mathbb{E}^Q\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right] = u \cdot p + d \cdot (1-p) = e^{r\Delta t} \iff p(u-d) = e^{r\Delta t} - d \iff p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$$

PROPOSIZIONE 1: $\quad \mathbb{E}^Q[S_T] = S_0 e^{rT}$ $\quad$ L'azione ha rendimento atteso r su tutto l'intervallo $[0,T]$

dim.

$$\mathbb{E}^Q[S_T] = \mathbb{E}^Q[S_n] = \mathbb{E}^Q\Big[\underbrace{\frac{S_n}{S_{n-1}} \cdot \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{S_1}{S_0}}_{\substack{n \text{ variabili} \\ \text{aleatorie indipendenti} \\ \text{ed identicamente distribuite.}}} \cdot S_0\Big] \overset{\text{per l'indipendenza}}{=} \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]}_{e^{r\Delta t}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\mathbb{E}^Q\left[\frac{S_1}{S_0}\right]}_{e^{r\Delta t}} \cdot S_0 =$$

$$= e^{n r \Delta t} S_0 = S_0 e^{rT} \quad \text{essendo } T = n\Delta t$$

Note

Se X e Y sono v.a. indipendenti

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$$

STRADA ALTERNATIVA

Per calcolare la media di $S_T = S_n$ possiamo utilizzare la distribuzione di S_n:

$$\boxed{S_n = S_0\, u^{X_n}\, d^{n-X_n}}$$

X_n = numero di rialzi in n passi
{ conta il numero di successi in n prove i.i.d. con prob. di successo p

$\boxed{X_n \sim B(n,p)}$ binomiale

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_n] = S_0 \sum_{k=0}^{n} u^k d^{n-k}\, Q(X_n = k) = S_0 \sum_{k=0}^{n} u^k d^{n-k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= S_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (up)^k [d(1-p)]^{n-k} = S_0 [\underbrace{up + d(1-p)}_{e^{r\Delta t}}]^n = S_0 e^{rn\Delta t} = S_0 e^{rT}$$

$\downarrow$

formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Nota

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x_k} h(x_k) P(X = x_k)$$

PROPOSIZIONE 2.

$$\boxed{f_0 = e^{-rT}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)]}$$

formula della valutazione neutrale al rischio:

il valore del derivato oggi = valore atteso scontato del payoff finale del derivato rispetto alla misura neutrale al rischio

Dim.

Utilizziamo la proprietà della media condizionata.

Date 2 v.a. X e Y che supponiamo discrete si definisce la distribuzione condizionale

$$P_{X|Y}(x|y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{\text{congiunta}}{\text{marginale}}$$

Per ogni y fissato è una densità di probabilità sui valori della v.a. X

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum_k x_k\, P(X = x_k \mid Y = y) = H(y) \quad \text{è una funzione di } y$$

$\mathbb{E}[X|Y]$ è la variabile aleatoria data da $H(Y)$ e si dimostra che la sua media coincide con quella di X: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$

Infatti $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[H(Y)] = \sum_a H(y_a) P(Y=y_a) =$

$$= \sum_a \left(\sum_k x_k P(X=x_k | Y=y_a) \right) P(Y=y_a) =$$

$$= \sum_k x_k \underbrace{\sum_a P(X=x_k | Y=y_a) P(Y=y_a)}_{P(X=x_k,\, Y=y_a)} =$$

$$= \sum_k x_k \left(\underbrace{\sum_a P(X=x_k, Y=y_a)}_{P(X=x_k)} \right) = \sum_k x_k P(X=x_k) = \mathbb{E}[X]$$

Usando questa proprietà dimostriamo che $f_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_n)]$

$$f_0 = \underbrace{e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_1(S_1)]}_{e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d (1-p)\}} = e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\underbrace{e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_2(S_2) | S_1]}_{V_1(S_1)}\Big] = e^{-2r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_2(S_2)] =$$

per la proprietà della media condizionata

$$= e^{-2r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_3(S_3) | S_2] \right] = e^{-3r\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_3(S_3)] = \dots = e^{-nr\Delta t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\underbrace{V_n(S_n)}_{F(S_n)}]$$

$$= e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_n)]$$

$\square$

Costruzione della strategia autofinanziante che replica il valore del derivato:

$$\{(\Delta_0, B_0), (\Delta_1, B_1), \dots, (\Delta_i, B_i), \dots, (\Delta_{n-1}, B_{n-1})\} \quad \text{strategia dinamica}$$

Δ_i = quota in azioni al tempo $i\Delta t$ $\qquad i = 0, \dots, n-1$

B_i = denaro in prestito al tempo $i\Delta t$

$\Delta_i = \Delta_i(S_i)$, $B_i = B_i(S_i)$ sono variabili aleatorie che dipendono dal prezzo dell'azione S_i

Condizione di replicabilità:

il valore finale della strategia = payoff del derivato al tempo T

(R) $$\Delta_{n-1} \cdot S_n - B_{n-1} e^{r\Delta t} = F(S_n)$$

Condizione di autofinanziamento (non si aggiunge liquidità):

(A) $$\underbrace{\Delta_i \cdot S_{i+1} - B_i e^{r\Delta t}}_{\substack{\text{valore al tempo } (i+1)\Delta t \\ \text{della strategia } (\Delta_i, B_i)}} = \underbrace{\Delta_{i+1} \cdot S_{i+1} - B_{i+1}}_{\substack{\text{valore al tempo } (1+i)\Delta t \\ \text{della strategia } (\Delta_{i+1}, B_{i+1})}}$$

In assenza di opportunità di arbitraggio la condizione di replica $\Rightarrow$

valore del derivato al tempo $(n-1)\Delta t$ = valore iniziale della strategia (Δ_{n-1}, B_{n-1}), ossia:

$$V_{n-1}(S_{n-1}) = \Delta_{n-1} \cdot S_{n-1} - B_{n-1}$$

e procedendo a ritroso abbiamo che anche la condizione (A) si scrive

come una condizione di replica: $\boxed{\Delta_i \cdot S_{i+1} - B_i e^{r\Delta t} = V_{i+1}(S_{i+1})}$

Questo per $i=0$ $\qquad \Delta_0 \cdot S_1 - h_0 e^{r\Delta t} = V_1(S_1)$

che si traduce in
$$\begin{cases} \Delta_0 \cdot S_u - h_0 e^{r\Delta t} = f_u & \text{se } S_1 = S_u \\ \Delta_0 \cdot S_d - h_0 e^{r\Delta t} = f_d & \text{se } S_1 = S_d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_0 = \dfrac{f_u - f_d}{S_u - S_d} \\ h_0 = e^{-r\Delta t}(\Delta_0 S_u - f_u) \end{cases}$$

Per $i=1$ $\qquad \Delta_1 \cdot S_2 - h_1 e^{r\Delta t} = V_2(S_2)$

se $S_1 = S_u$
$$\begin{cases} \Delta_{1,u} S_{uu} - h_{1,u} e^{r\Delta t} = f_{uu} \\ \Delta_{1,u} S_{ud} - h_{1,d} e^{r\Delta t} = f_{ud} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{1,u} = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{S_{uu} - S_{ud}}$$

$S_u \to S_{uu}$, $S_u \to S_{ud}$

se $S_1 = S_d$
$$\begin{cases} \Delta_{1,d} S_{du} - h_{1,d} e^{r\Delta t} = f_{ud} \\ \Delta_{1,d} S_{dd} - h_{1,d} e^{r\Delta t} = f_{dd} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{1,d} = \frac{f_{du} - f_{dd}}{S_{du} - S_{dd}}$$

$S_d \to S_{ud}$, $S_d \to S_{dd}$

Per i generico: se $S_i = s$ $\qquad$ $\Delta_i(s)$, $h_i(s)$

$s \to S_{i+1} = su$, $V_{i+1}(su)$; $\quad s \to S_{i+1} = sd$, $V_{i+1}(sd)$

$\Delta_i(s)$ quota in azioni al tempo $i\Delta t$ se $S_i = s$

valore finale della strategia (Δ_i, h_i) se $S_i = s$ in caso di rialzo

$$\begin{cases} \Delta_i(s) \cdot su - h_i(s) e^{r\Delta t} = V_{i+1}(su) & \text{in caso di rialzo } S_{i+1} = su \\ \Delta_i(s) \cdot sd - h_i(s) e^{r\Delta t} = V_{i+1}(sd) & \text{in caso di ribasso } S_{i+1} = sd \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_i(s) = \frac{V_{i+1}(su) - V_{i+1}(sd)}{su - sd}} \qquad i = 0, \dots, n-1 \quad \text{se } S_i = s$$

$$\text{e} \quad b_i(s) = e^{-r\Delta t}\{\Delta_i(s)\, su - V_{i+1}(su)\}$$

Questa strategia è detta Δ-hedging.

Inoltre in AOA: $f_0 = \Delta_0 S_0 - b_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\}$

$\vdots$

$$\boxed{V_i(s) = \underbrace{\Delta_i(s)}_{\text{andando a sostituire } \Delta_i(s) = \frac{V_{i+1}(su) - V_{i+1}(sd)}{su - sd}} \cdot s - \underbrace{b_i(s)}_{\text{andando a sostituire il valore di } b_i(s)}} = e^{-r\Delta t}\{V_{i+1}(su)p + V_{i+1}(sd)(1-p)\}$$

valore del derivato al tempo $i\Delta t$ se $S_i = s$
=
valore della strategia (Δ_i, b_i) se $S_i = s$

Abbiamo ritrovato le formule scritte procedendo a ritroso sull'albero.

Valutazioni opzioni americane

Il valore finale delle opzioni americane è uguale a quello delle opzioni europee, mentre nei nodi intermedi bisogna verificare se è conveniente l'esercizio anticipato, ossia se vale di più il valore all'esercizio rispetto al valore senza l'esercizio:

se $S_i = s$ $\quad V_i^*(s) = \max\{ F(s), \; e^{-r\Delta t}[V_{i+1}^*(su)\,p + V_{i+1}^*(sd)(1-p)] \}$

nel caso di una call $\quad F(s) = s - K$

nel caso di una put $\quad F(s) = K - s$

Esempio 11.7

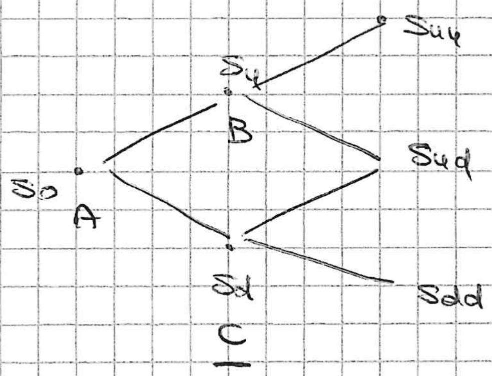
Put europea a due anni $\quad K = 52\$ \quad S_0 = 50\$ \quad r = 5\%$

alla fine di ogni anno il prezzo dell'azione sale del 20% o scende del 20%

$S_u = 50 + 0.2 \cdot 50 = 60 \quad u = 1.2 \quad S_{uu} = 72$

$S_d = 50 - 0.2 \cdot 50 = 40 \quad d = 0.8 \quad S_{ud} = 48$

$S_{dd} = 32$



$f_{uu} = (K - S_{uu})_+ = (52 - 72)_+ = 0$

$p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \dfrac{e^{0.05} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$

$f_{ud} = (K - S_{ud})_+ = (52 - 48)_+ = 4$

$f_{dd} = (K - S_{dd}) = (52 - 32)_+ = 20$

$f_u = e^{-r\Delta t}\{f_{uu}p + f_{ud}(1-p)\} = 1.4147\,\$$

$f_d = e^{-r\Delta t}\{f_{ud}p + f_{dd}(1-p)\} = 9.4636\,\$$

$f_0 = e^{-r\Delta t}\{f_u p + f_d(1-p)\} = 4.1923$

Valutiamo ora la put americana corrispondente:

$f_u^* = \max\{K - S_u,\ f_u\} = \max\{52-60,\ 1.4147\} = f_u = 1.4147$ nel nodo B non conviene l'esercizio anticipato

$f_d^* = \max\{K - S_d,\ f_d\} = \max\{\underbrace{52-40}_{12},\ 9.4636\} = 12$ nel nodo C conviene l'esercizio anticipato

$f_0^* = \max\{K - S_0,\ e^{-r\Delta t}\{\overset{1.4147}{\overset{\shortparallel}{f_u^*}}p + \overset{12}{\overset{\shortparallel}{f_d^*}}(1-p)\}\} =$

$= \max\{\underbrace{52-50}_{2},\ 5.0894\} = 5.0894$ nel nodo A non conviene l'esercizio

$\boxed{\text{OSS}}$ il valore della call europea = valore della call americana nel caso in cui l'azione non offre dividendi

Questo esempio mostra invece che può essere ottimale l'esercizio anticipato per una put, in tal caso il valore della put americana risulta strettamente maggiore del valore della corrispondente put europea.

Come si scelgono u e d nel modello binomiale se conosciamo la volatilità dell'azione?

σ volatilità $\qquad \Delta t = \frac{T}{m} \qquad \begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$

Sia μ il tasso di rendimento atteso dell'azione nel mondo reale e σ la volatilità, questo significa che $\mathbb{E}[S_1] = S_0 e^{\mu \Delta t}$ e più in generale

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right] = e^{\mu \Delta t} \qquad i = 0, \dots, m$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[S_n] = S_0 e^{\mu T}$ se $T = m\Delta t$

infatti $\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{S_{n-1}} \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_1}{S_0} S_0\right] = e^{\mu\Delta t} \cdot \ldots \cdot e^{\mu \Delta t} \cdot S_0 = S_0 e^{\mu T}$

indipendenze dei rendimenti relativi

Nel mondo reale

$$\frac{S_i}{S_{i-1}} = \begin{cases} u & \text{con prob. } q \\ d & \text{" } 1-q \end{cases}$$

$\mathbb{E}\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right] = uq + d(1-q) = e^{\mu \Delta t} \qquad q(u-d) = e^{\mu\Delta t} - d \Rightarrow q = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u-d}$

prob. di rialzo nel mondo reale

tasso di rendimento atteso nel mondo reale

La volatilità dell'azione è quel valore $\sigma > 0$: $\sigma^2 \Delta t$ = Varianza del tasso di rendimento dell'azione nell'intervallo Δt

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) = \sigma^2 \Delta t$$

Ricordo che $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

Calcoliamo:

$$Var\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right]^2 = u^2 q + d^2(1-q) - (e^{\mu\Delta t})^2 =$$
$$= q(u^2-d^2) + d^2 - e^{2\mu\Delta t}$$

ricordiamo che $q = \dfrac{e^{\mu\Delta t} - d}{u-d}$

$$\Rightarrow \sigma^2\Delta t = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u-\cancel{d}}\,(\cancel{u^2-d^2})_{u+d} + d^2 - e^{2\mu\Delta t} = (e^{\mu\Delta t}-d)(u+d) + d^2 - e^{2\mu\Delta t} =$$
$$= e^{\mu\Delta t}(u+d) - e^{2\mu\Delta t} - ud$$

Approssimiamo $e^x = 1 + x + o(x)$ $\quad o(x)$ infinitesimo di ordine superiore a x

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$

Trascurando i termini $o(\Delta t)$:

$$\boxed{\sigma^2\Delta t = (1+\mu\Delta t)(u+d) - (1+2\mu\Delta t) - ud}$$

Mostriamo che $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ risolve questa espressione a meno di $o(\Delta t)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \underset{x=\sigma\sqrt{\Delta t}}{=} 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + o(\Delta t)$$

$$e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + o(\Delta t)$$

$u+d = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 2 + \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t)$, $u \cdot d = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\, e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1$

$$\sigma^2 \Delta t = (1+\mu\Delta t)(2+\sigma^2\Delta t) - (1+2\mu\Delta t) - 1 = 2 + \sigma^2\Delta t + 2\mu\Delta t - 2 - 2\mu\Delta t = \sigma^2\Delta t$$

Se vogliamo scegliere u e d coerenti con σ : $\boxed{\begin{array}{l} u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{array}}$

Osservazione:

Se rifacciamo gli stessi conti rispetto alla misura neutrale al rischio Q, dobbiamo utilizzare $p = \dfrac{e^{r\Delta t} - d}{u-d}$ al posto di q e r al posto di μ, otteniamo

che $\mathrm{Var}_Q\left(\dfrac{S_i}{S_{i-1}}\right) = (1+r\Delta t)(u+d) - (1+2r\Delta t) - ud$

e per $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\Delta t}$

troviamo che $\mathrm{Var}_Q\left(\dfrac{S_i}{S_{i-1}}\right) = \sigma^2\Delta t$

La volatilità dell'azione è la stessa sia rispetto a P che a Q, ~~[illegible]~~

cambia solo il rendimento atteso, rispetto a P è μ e rispetto a Q è r