CALCOLO DELLE PROBABILITA' - A/A 2022/23
Foglio di esercizi n. 9 (2 PAGINE)

1) Siano U e V due variabili aleatorie con densita' di probabilita' discreta congiunta data dalla seguente tabella:

V \ U	-2	-1	0	3
-2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0

a) U e V sono indipendenti?
b) Senza effettuare calcoli, secondo voi U e V sono correlate positivamente, negativamente o scorrelate?
c) Calcolare il coefficiente di correlazione tra U e V, $\rho_{U,V}$

2) Si sceglie a caso un numero tra 1 e 4 e sia X il risultato. Si scrivono poi i numeri da X a 4 su altrettanti foglietti e si sceglie un foglietto a caso: sia Y il numero sul foglietto.
a) senza effettuare calcoli, X e Y sono correlate positivamente, negativamente o scorrelate?
b) Scrivere (in qualunque forma) la densita' discreta di probabilita' congiunta della coppia (X, Y).
c) Calcolare $\mathbf{Cov}[X, Y]$.

3) Siano X e Y due v.a. indipendenti con la stessa densita' di probabilta':

$$\mathbf{P}(X = -2) = \mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(Y = -2) = \mathbf{P}(Y = -1) = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}.$$

Siano $Z = X + Y$ e $W = X - Y$. Calcolare:
a) $\mathbf{E}[X]$, $\mathbf{Var}[X]$, $\mathbf{E}[Y]$ e $\mathbf{Var}[Y]$;
b) $\mathbf{E}[Z]$ e $\mathbf{Var}[Z]$, $\mathbf{E}[W]$ e $\mathbf{Var}[W]$ (utilizzare le proprieta' della varianza)
c) $\mathbf{Cov}[X, Z]$, $\mathbf{Cov}[X, W]$, $\mathbf{Cov}[W, Z]$ (utilizzare le proprieta' della covarianza)
d) W e Z sono scorrelate? Sono indipendenti?
R: $\mathbf{E}[Z] = -\frac{4}{3}$**,** $\mathbf{Var}[Z] = \frac{28}{9}$**,** $\mathbf{E}[W] = 0$**,** $\mathbf{Var}[W] = \frac{28}{9}$**,** $\mathbf{Cov}[X, Z] = \frac{14}{9}$, $\mathbf{Cov}[X, W] = \frac{14}{9}$, $\mathbf{Cov}[W, Z] = 0$.

4) Siano X e Y due variabili aleatorie con densita' congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3\, e^{-xy} & \text{per } 0 < x,\ 1 < y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Calcolare $\mathbf{Cov}[X, Y]$. **R:** $\mathbf{E}[X] = 3$, $\mathbf{E}[Y] = \frac{3}{2}$, $\mathbf{E}[XY] = 4$, quindi $\mathbf{Cov}[X, Y] = -\frac{1}{2}$**.**

5) Siano X e Y due variabili aleatorie con:

$$\mathbf{E}[X] = 2,\ \mathbf{E}[Y] = 0,\ \mathbf{Var}[X] = 1,\ \mathbf{Var}[Y] = 4,\ \mathbf{Cov}[X, Y] = -1.$$

Siano poi

$$U = 4X + Y$$
$$V = \tfrac{1}{3}X + \tfrac{1}{3}Y.$$

Calcolare $\mathrm{E}[U]$, $\mathrm{E}[V]$, $\mathrm{Var}[U]$, $\mathrm{Var}[V]$, $\mathrm{Cov}[U, V]$.

6) Il signor G si trova nella sua abitazione e deve prendere un treno che parte dalla stazione esattamente tra 40 minuti. A 10 minuti dalla sua abitazione c'e' la fermata di un autobus che lo porta alla stazione in 20 minuti. Alla stessa distanza, ma dalla parte opposta, c'e' la fermata di un altro autobus che in 5 minuti lo porta alla fermata di un secondo autobus che lo porterebbe alla stazione in 10 minuti. Il signor G non conosce l'orario di passaggio degli autobus, ma sa che, su ciascuna linea, gli autobus passano ogni quarto d'ora. I tempi di passaggio degli autobus sono tutti indipendenti tra loro.

a) Calcolare la densita' di probabilita' del tempo complessivo di attesa del signor G nel caso in cui decida di scegliere la soluzione con due autobus.

b) Quale strategia conviene al signor G per avere la maggior probabilita' di prendere il treno?

7) Un componente di un'apparecchiatura ha una durata aleatoria che segue la legge di densita' di probabilita'

$$2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{I}_{(0,\infty)}(t)$$

(il tempo e' misurato in anni).

L'apparecchiatura viene sottoposta a una manutenzione programmata: ogni anno il componente viene sostituito con un componente nuovo dello stesso tipo.

a) Qual e' la probabilita' che il componente si rompa tra un intervento di manutenzione e l'altro ?

b) Qual e' la probabilita' che, almeno una volta nei primi due anni, il componente si rompa tra un intervento di manutenzione e l'altro?